INSTITUZIONI
DELLE
SEZIONI CONICHE

DEL PADRE

D. GUIDO GRANDI, 1671-1742

ABATE CAMALDOLESE

CON L' AGGIUNTA IN FINE D' ALTRE DIMOSTRAZIONI.

IN VENEZIA, MDCCLXX.

APPRESSO ANDREA RECURTI,

Erede del qu: Gio: Battista;

All' Insegna della PROVVIDENZA

CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

AVVISO
DEGLI EDITORI DI FIRENZE
AL LETTORE.

SEmbrerà forse a taluno, che l'aver noi dato alla luce quest'Opera del Reverendiss. Padre Abate D. Guido Grandi, celebre Professore di Mattematica nell'Università di Pisa, che con pianto universale della Repubblica Letteraria passò ultimamente a godere l'eterno riposo, sia stata una fatica totalmente perduta, e gettata, quasi che niun profitto, e vantaggio sia per arrecare agl'Intendenti, che ugualmente bene giunger potevano sì nell'una, che nell'altra lingua al possedimento di quella sublime scienza, che per entro di se ella racchiude. Ma non così andrà l'avviso loro, se quale in ciò fare sia stato il nostro intendimento, ascolteranno.

Siccome abbiamo avuto in sorte di pubblicare per mezzo de' nostri Torchi altre diverse Opere dell'istesso illustre Autore, ed altre ancora ce ne restano, che di breve speriamo di porre sotto i medesimi, per arricchir sempre più la Repubblica Letteraria; così abbiamo stimato ben fatto d'unire a queste anche la presente Opera, distesa nell'istesso volgare idioma, sì per continuarne, per così dire, la serie,

sì anche perchè pensando noi un giorno d'includerle tutte in un solo volume, fosse ciascheduna uguale all'altra nel linguaggio, conforme lo è e nella bellezza, e nella scienza più recondita, e più sublime.

Quel gradimento pertanto, che hanno incontrato altre Opere di gravissimi Autori da una lingua nell'altra tradotte, che non stiamo quì ad annoverare per esser note a chicchessia, speriamo, che possa ottenere anche la presente; Tanto più, che ci è riuscito d'aumentarla, e di arricchirla d'un Appendice, che contiene alcune Proposizioni lasciate imperfette dall'Autore, ed ora in nuova forma ordinate, e chiaramente dimostrate dal Sig. Tommaso Perelli, di lui degno scolare, e al presente Professore d'Astronomia nell'Università di Pisa; con l'aggiunta d'un altra dimostrazione intorno alla misura generale di tutti i Conoidi, e Sferoidi, da esso ritrovata, solamente proposta tra gli Scritti del celebre Evangelista Torricelli, che di buon animo vi offerischiamo, ben sicuri, come potrà ciascheduno in leggendola pienamente conoscere, di non aver tralasciato d'usarvi tutta l'attenzione, e diligenza, nè aver risparmiato fatica alcuna per renderla viepiù illustre, e copiosa.

PRE-

PREFAZIONE
DELL' AUTORE
Posta in fronte dell' edizione di Napoli.

A dottrina delle SEZIONI CONICHE *quanto gioconda, e dilettevole si è a sapersi, altrettanto utile, e vantaggiosa riesce a chi imprende delle medesime la cognizione, la quale è necessaria non sola a quelli, che fanno professione della pura Geometrìa, ma ancora a' Filosofi, agli Astronomi, agli Ottici, agli Orografi, e agli Architetti; ed in oltre molto opportuna alle Fisiche speculazioni, e ad un' infinità di usi meccanici. E di vero il moto de' corpi terrestri traversalmente lanciati si distende per curve Paraboliche, mediante le prossime direzioni di gravità, tenute sensibilmente per paralelle, comecchè riguardanti a centro di gran lunga distante. Ma se le medesime direzioni si considerino non in rigore equidistanti, ma bensì scambievolmente inclinate, comecchè convergenti al centro della Terra, si descrive da' Projetti un arco di curve Ellitiche, il Fuoco più remoto del quale appartiene al centro istesso del Globo terrestre: Il Fuoco poi più vicino è il medesimo, che apparterrebbe alla Parabola, se le dette direzioni de' gravi fossero considerate come paralelle. Per tal guisa ancora l' Orbite de' Pianeti attorno al Sole, e di ciascun satellite descritte intorno al suo Pianeta primario, sono Elliticbe, giusta l' Ipotesi di Keplero, e di Nevvton: Certamente la cognizione delle Sezioni Coniche si ricerca eziandio nel disporre attamente le Riflessioni, e le Refrazioni, di-*

pen-

pendendo da' Fuochi di queste la riflessione de' raggi, i quali o concorrano in un solo punto, ove accendano il fuoco, o in quello solamente tendano per viepiù avvicinare l'immagine dell'oggetto, o si rimandino paralelli, per conservare ad una grandissima distanza quasi la medesima intensione: anzi che la refrazione de' medesimi raggi ricerca Lenti, o Menisci di superficie prodotte dalla rivoluzione di figure Ellittiche, o Iperboliche, o Paraboliche, e Circolari, acciocchè la congiunzione de' raggi rifratti da' Fuochi di quelle, o la loro direzione verso un punto più vicino renda i ricercati effetti. Anco negli Orivoli a Sole l'ombre della lancetta gnomonica, nel piano, in cui posa, descrive il più delle volte delle Iperbole, in qualche sito ancora delle Parabole, ed in alcun altro dell'Ellissi, nelle quali vanno le linee orarie a terminare. Anzi dagli Architetti medesimi si devono nelle Fabbriche non di rado descrivere archi Ellittici; e che le volte appoggiate a termini non orizontalmente posti si debbano disporre in forma di figura Parabolica, o Iperbolica, fu insegnamento del chiarissimo F. Blondel nella sua Architettura. Ma la volta a vela alla Fiorentina dall'Emisfero tagliata per mezzo di quattro finestre in fezioni quadrabili, ha l'Icnografia Parabolica, e il perimetro delle sue cavità eguale ad una Curva Ellittica, conforme nella dimostrazione Geometrica de' Problemi del chiarissimo Vincenzio Viviani, che la veva proposto la Volta di cotal forma, io stesso dimostrai alla pag. 37: e 136. della detta Opera. Anzi il chiarissimo Bernardo Belidoro nel nuovo suo corso Mattematico al num. 609. dà per regola agli Architetti Militari, che la cavità delle mine da riempirsi di polvere negli Assedj, dee disporsi con Parabolica incurvatura.

Ma perchè il metodo tenuto dal gran Geometra

Apollonio Pergeo nell' esporre questa scienza sì utile delle Sezioni Coniche, è troppo lungo, riempiendo tal volta la dimostrazione di un solo Teorema, o di nn Problema due, ed alle volte tre facce di foglio; perciò ho stimato più conveniente di racchiudere in questo più breve compendio le proprietà principali di queste Curve, con alcuni altri moderni ritrovamenti; onde possano i Giovani studiosi con un metodo più facile giungere ad impararle in un tempo non tanto lungo. Lo che fu anche approvato dagli Eruditi di Lipsia, i quali nel dar ragguaglio ne' supplementi de' loro Atti d' un altro mio somigliante compendio delle Sezioni Coniche, esposto già in lingua Italiana, e stampato in Firenze l' anno 1722. in cotal forma nel Tomo VIII. pubblicato l' anno 1724. alla pag. 434. espressero il loro sentimento.

In tanto numero scriptorum, qui tradunt proprietates Sectionum Coni, etiamnum desiderabatur liber aliquis, mole parvus, materia plenus, in demonstrationibus brevis, & quod palmarium est, ad veterum methodum conscriptus: Rem igitur fecit gratissimam, & utilissimam Geometriæ studiosis celeberrimus Grandus, qui tam eleganter, tam copiose, & tanta nihilominus brevitate persecutus est hanc partem Geometriæ, quam in scholis plerique vix hactenus attigerunt, spissitudine voluminum, vel analyticis characteribus deterriti, & idcirco ultra Elementa Euclidis raro progressi.

E poichè quivi alla pag. 435. i medesimi Eruditi di Lipsia avvertono. Cl. Christianum Aug. Hausen, in Academia Lipsiensi Matheseos Professorem utilitate operis permotum inter perlegendum versionem hujus opusculi latinam adornasse in gratiam auditorum brevi cum lectionibus ejus

Geo-

Geometricis proditurum, & ab originali suo non differentem &c. *del quale ancora attestano, che in qualche luogo* demonstrationes interdum breviores, & concinniores, suppletis quibusdam, & evidentius expositis illationum nexibus, faciliores effecerit, & Figuras, in quibus chalcographus ab hypothesi aberraverat, accuratius construxerit; *tutta volta non essendo per anche pervenuta notizia alcuna di cotale edizione, ho stimato perciò opportuno di dare al pubblico questa mia Latina Epitome delle Sezioni Coniche, accresciuta dell' aggiunta di alcuni altri Teoremi, e di alcuni superflui diminuita, colla correzione degli errori scorsi nella prima edizione Italiana tanto nel Testo, quanto nella descrizione delle Figure, il di cui uso potrà apportare utile grandissimo non solamente in Italia, ma in qualunque altra Provincia d' Europa, giusta l' attestato de' medesimi Letterati di Lipsia; imperocchè non moltissimi, ma anzi pochissimi Studiosi Europei Oltramontani averebbero potuto intendere questa Operetta stampata in Idioma Toscano. Quindi è, che anco l' egregio Architetto della milizia Spagnuola D. Giovanni de' Aguillar amò meglio di tradurre in lingua Spagnuola questo mio compendio delle Sezioni Coniche per renderlo in tal forma intelligibile agli scolari della sua nazione applicati allo studio mattematico. Della qual versione però molto più acconica sarà per avventura questa esposizione* Latina, *che a tal effetto volli piuttosto permettere, che si stampasse, come quella, che qui agevolmente poteva essere intesa dalla maggior parte de' Geometri d' Europa, che l'*Italiana, *o la Spagnuola, o qualunque altra, che in alcuno Idioma particolare di qualsisia altro Paese fosse dettata.*

COM.

COMPENDIO
DELLE
SEZIONI CONICHE.

PRIMA DEFINIZIONE.

TAV. I. FIG. 1. 2.

I. SE per un punto *A*, posto fuori del piano d' un cerchio *BED*, passi la retta *BAF* indefinitamente prolungata da amendue le parti, e stando fisso il medesimo punto *A*, si muova la detta retta *BAF* per la circonferenza del suddetto cerchio *BED*, continuamente radendolo finchè ritorni là, d' onde cominciò a muoversi; l'una, e l'altra superficie prodotta dal moto di tal linea di sotto, e di sopra dal punto *A*, dicesi superficie Conica.

II. E i Solidi compresi da tali superficie, che terminano al cerchio *BED*, ovvero all' opposto *bed*, chiamansi Coni.

III. Vertice del Cono, e della superficie Conica chiamasi il punto fisso *A*.

IV. Base del Cono è il Cerchio dove egli termina.

V. Asse del Cono dicesi la retta *AC*, che congiun-

giunge il vertice del Cono *A* col centro *C* della sua base circolare.

FIG. 1. VI. Allorchè l' asse *AC* è perpendicolare al piano della base, il Cono si dice retto.

FIG. 2. VII. Ma quando l' Asse è obliquamente inclinato al piano della base, allora il Cono dicesi Scaleno.

COROLLARJ.

I. Quindi è manifesto, che ambedue le superficie Coniche *BAD*, *dAb* contrapposte al vertice comune *A* possono prolungarsi in infinito, se prolunghisi in infinito quella linea, che le genera.

II. Preso qualunque punto *H* nella superficie Conica, la linea retta, che congiunge tal punto con il vertice *A*, giacerà nella medesima superficie Conica: Imperocchè la retta *EA*, che movendosi all' intorno, genera la superficie Conica, passa per qualsivoglia punto di essa, e perciò s' incontra col punto *H*, sicchè deve convenire con la *AH*.

III. Onde qualunque retta *AH*, che congiunga il vertice *A* del Cono con qualsivoglia punto *H* della superficie Conica, prolungandosi dovrà cadere in un punto *E* della circonferenza della base.

IV. Che se fossero presi due punti *H*, *I* nella medesima superficie Conica, la retta *HI*, che gli congiunge se non passa pel vertice *A*, caderà dentro il Cono; Imperocchè congiunte col vertice *A* le rette *AH*, *AI*, e prolungate alla periferia della base, dove caderanno ne' punti *E*, *B*, se giungasi *EB*, caderà dentro il cerchio (a); dunque il piano del triangolo *ABE* s' im-

(a) Prop. 2.

s'immerge nel Cono, poichè sega la di lui base; e per questo la retta *HI* esistente in detto piano, come quella, che congiunge due punti presi ne' lati di tale triangolo, ancor essa sarà dentro il Cono per quella porzione fra detti punti interposta, e si stenderà fuora del medesimo, se più oltre si prolunghi.

del libr. degli Elem.

V. Se il Cono si tagli con un piano, che passi pel vertice *A*, la Sezione sarà un triangolo; perciocchè amendue le rette *AB*, *AE*, o pure *AB*, *AD*, che sono Sezioni comuni della superficie Conica, e de' piani *ABE*, *ABD*, che la segano, sempre convengono con la retta mobile *AB*, che nel generar la superficie Conica passa per i medesimi punti *B*, *E*, *D*. Similmente la comune Sezione del piano segante col piano della base è la retta *EB*, o pur *BD*; dunque *ABE*, o *ABD* sono triangoli rettilinei.

SCOLIO.

FIG. 3.

I. Se le Sezioni del Cono triangolari, e non le Curve solamente volessimo esporre in questo compendio, vi sarebbe da considerare i triangoli, o generati da un piano, che passa per l'asse come *ABD*, *AFE*, i quali sempre fra loro nel Cono retto sono uguali, mercè delle loro basi uguali *BD*, *FE*, che sono diametri della base circolare, e della uguale altezza *AC*, asse del Cono, che perpendicolare insiste al piano, e perciò a tutte le rette, che passano per *C*: o pure quei triangoli, che nascenti da un piano condotto fuori dell' asse, come *ABE*, *ABL* distendonsi dal vertice *A* alle corde *BE*, *BL*, i quali triangoli nel medesimo Cono retto sempre sono equicruri a cagione de' lati *AB*, *AE*,

A 2 AL,

AL, fra loro uguali, attesochè il quadrato di questi uguaglia il quadrato dell' asse *AC*, e il quadrato del raggio circolare *CB*, o *CE*, o *CL*; ma disuguali di grandezza, perchè le basi *BE*, *BL* non s' uguagliano, come quelle, che giunte con i lati uguali, fanno disuguagli gli angoli verticali opposti *BAE*, *BAL* (a), dei quali i seni retti *EN*, *LO* sono parimente disuguali, onde presa l' *AB* per base comune de' triangoli *ABE*, *ABL* saranno essi fra loro, come le disuguali altezze *EN*, *LO*.

(a) 25. del 1. degli El.

II. Pertanto se l' angolo verticale *BAD* del triangolo, che passa per l'asse, sarà retto, o acuto, gli angoli *BAE*, *BAL* degli altri triangoli condotti fuori dell' asse, saranno minori, secondochè insisteranno alle minori corde *BE*, *BL*; e perciò il maggiore di tutti i triangoli sarà quello, che passa per l' asse, e gli altri, che hanno per base una corda più piccola minori, secondo che resteranno più lontani dall' asse. Che se l' angolo verticale del triangolo condotto per l' asse sarà ottuso, non sarà questo triangolo il maggior di tutti, ma se ne potrà determinare un altro fuor dell' asse maggior del medesimo. Perciocchè in quel caso il quadrato del diametro *BD* opposto all' angolo ottuso *BAD* avanzerà i quadrati de' lati *AB*, *AD* (b); Dunque trovata una corda *BL* minor del diametro, il quadrato della quale riesca uguale ai due quadrati de' lati *AB*, *AL*, l' angolo *BAL* diverrà retto (c), e perciò il triangolo *BAL* descritto fuor dell' asse, sarà maggiore dell' altro triangolo condotto per l' asse; Imperocchè prendendo per base il lato *AB*, il triangolo *BAL* averà per altezza *LA* uguale ad *AD*, e però maggiore della perpendicolare *DM*, altezza dell' altro

(b) 12. del 2. degli El.

(c) 48. del 1. degli El.

altro triangolo *BAD* per l' asse, cioè seno retto dell' angolo *DAM* conseguente all' ottuso *BAD*; E per questo il triangolo *BAL*, che ha l' angolo retto al vertice del Cono, avanzerà qualunque altro triangolo condotto per l' asse, o fuori dell' asse, mediante l' altezza maggior d' ogn' altra. Che se descrivasi fuor dell' asse un triangolo *BAE* con l' angolo acuto al vertice *A* uguale a *DAM*, conseguente all' angolo ottuso del triangolo *BAD* per l' asse, s' uguaglieranno i triangoli *BAE*, *BAD*, attesochè per esser seni retti d' angoli uguali, le perpendicolari *EN*, *DM* debbono ugualgliarsi fra loro.

III. Ma se il Cono fosse scaleno, tirata dal vertice *A* al piano della base la perpendicolare *AQ*, e condotto per essa, e per l' asse *AC* un piano, che produrrà il triangolo per l' asse *ABD* retto al piano della base *BED*, è manifesto, che il lato *AB* più lontano dal perpendicolo *AQ*, è il massimo di tutti i lati del Cono; ed il minimo per l' opposto è il lato *AD* più vicino al suddetto perpendicolo: degli altri lati poi fra mezzo *AF*, *AE*, maggiore è quello, che più s' accosta al massimo, e quello è minore, che più dal medesimo si discosta. Imperocchè la linea *QB*, che passa pel Centro, è la maggiore di tutte l' altre condotte dal punto *Q* alla periferia del Cerchio, e la minore si è *QD* porzione della medesima: l' altre poi *QF*, *QE* maggiori, o minori, secondochè o all' una, o all' altra sono più vicine (a): laonde anco i quadrati delle medesime saranno respettivamente massimi, o minimi, maggiori, o minori: siccome s' uguaglieranno due qualsivoglia quadrati delle linee *QO*, *QE* dalla massima *QB* equidistanti, e perciò fra loro uguali. Onde aggiunto

Fig. 4. 5.

(a) 7. e 8. del 3. deg. Elem.

to a ciascuno di detti quadrati il quadrato della perpendicolare *AQ*, il quadrato *AB* sarà il massimo di tutti, ed *AD* il minimo; i quadrati poi *AF*, *AE* maggiori, o minori a proporzione della lor vicinanza, o distanza dal massimo. Similmente i quadrati *AO*, *AE*, che toccano i termini della retta *EHO*, ordinata al diametro *DB*, saranno fra loro uguali. Dunque è chiaro, che di tutti i lati del Cono, il massimo è l' *AB*, l' *AD* il minimo, e gli altri maggiori, o minori, secondochè sono, o più prossimi, o più lontani dal massimo; o uguali se sieno equidistanti dal medesimo, come *AO*, *AE*. Quali, ed altri parimente condotti a' termini d'un' altra ordinata fanno il triangolo equicrure *AOE*; ma gli altri triangoli saranno sempre scaleni, se non si desse il caso, che qualcheduno di essi avesse un lato uguale alla base.

IV. Se nel Cono scaleno alcuno angolo verticale del triangolo per l' asse sarà retto, retti saranno parimente tutti gli altri angoli verticali, e perciò uguali fra loro. Imperocchè descritto un semicerchio sul diametro *DB* nel piano del triangolo per l' asse, doverà passare pel vertice *A*, atteso l' angolo retto, compreso ivi da' lati del triangolo, e per questo l' asse *AC* diverrà sempre uguale al raggio della base *CB*: onde in qualunque altro triangolo *EAF*, che passi per l' asse, il semicerchio descritto sopra il diametro *EF* nel piano di detto triangolo passerà pel vertice *A*, per essere *AC* uguale a' raggi *CF*, *CE*; e perciò i lati ancora *EA*, *FA* conterranno un angolo retto (a). Che se poi fosse acuto, o pure ottuso l' angolo *BAD*, gli altri triangoli per l' asse averanno gli angoli al vertice *A* disuguali, eccetto se fossero le di loro

(a) 31. del 3°. degli Elem.

so basi ugualmente inclinate al diametro *BD*.

V. Le somme però de' quadrati, fatti dai lati di qualunque triangolo per l' asse, saranno sempre uguali. Imperocchè secondo abbiamo dimostrato nelle nostre Geometriche Instituzioni, in qualsivoglia triangolo i quadrati de' due lati sono uguali al doppio del quadrato della retta, tirata dal vertice alla metà della base, insieme col doppio del quadrato dell' istessa metà della base. Per tanto i due quadrati *AB*, *AD* uguagliano il doppio quadrato dell' asse *AC* col doppio quadrato del raggio *CB*. Similmente i due quadrati *AE*, *AF*, saranno uguali al doppio quadrato del medesimo asse *AC*, e al doppio quadrato del raggio *CE*, uguale a *CB*; adunque i due quadrati *AB*, *AD* sono uguali a' due quadrati *AE*, *AF*.

VI. Il minimo però di questi triangoli per l'asse sarà *BAD* retto al piano della base, che passa pel perpendicolo *AQ*; ed *EAF* sarà il massimo, la di cui base *EF* sia perpendicolare all' altro diametro *BD*. La grandezza poi *PAL* degli altri triangoli sarà intermedia, di modochè quelli saranno maggiori, che più si accosteranno al massimo. Imperocchè se sopra la retta *CQ* fra l' asse, e'l perpendicolo, come sopra al diametro, si descriva il cerchio *CSQ* nel piano della base del Cono, quivi caderanno tutte le perpendicolari condotte dal vertice *A* alle basi di qualunque triangolo per l' asse. Poichè l' *ECF* perpendicolare al diametro *DB* toccherà il cerchio *QSC* in *C*, ed il triangolo *EAF* avrà i lati uguali *AE*, *AF* (come dimostrammo al num. 3.) e perciò l' *AC*, che sega pel mezzo la base del triangolo equicrure, gli sarà perpendicolare. Che se un altro diametro *PL*

FIG. 6. e 7.

ſeghi il Cerchio *QSC* in *S*, condotta dal vertice l'*AS*, ſarà queſta pure perpendicolare all'iſteſſa *PL*; perchè giunta *QS*, ſarà il quadrato *QC* uguale ai quadrati *CS*, *QS* (a), onde il quadrato *AC*, uguale a' quadrati *AQ*, e *QC* (b), ſarà uguale a' quadrati *AQ*, *QS*, *SC*: ma il quadrato *AS* uguaglia i quadrati *AQ*, *QS*; dunque il quadrato *AC* è uguale a i quadrati *AS*, *SC*, e perciò l'angolo *ASC* ſarà retto (c). Perchè dunque (come moſtroſſi al num. 3. de' lati del Cono) la retta *AC* è la maſſima di tutte le rette condotte dal vertice *A* alla periferia del cerchio *QSC*, *AQ* la minima, e *AS* maggiore, o minore, ſecondo che alla maſſima s'accoſta, o ſi dilunga; per tal ragione il triangolo *EAF*, che ha per altezza l'*AC*, ſarà il maſſimo, il minimo *BAD*, che ha per altezza l'*AQ*, e *PAL*, a cui ſerve d'altezza l'*AS*, ſarà di mezzana grandezza.

(a) 2. del 3. e 47. del 1. degli El.

(b) 47. del 1. degli El.

(c) 48. del primo degli Elem.

FIG. 8.

VII. Finalmente tuttochè provato abbiamo eſſer nel Cono retto, il di cui aſſe ſia uguale, o maggiore del raggio della baſe, cioè dove l'angolo verticale del triangolo per l'aſſe ſia retto o acuto, i triangoli fuor dell'aſſe ſempre minori di qualunque triangolo per l'aſſe; nondimeno nel Cono ſcaleno, o ſia retto, o acuto, o pure ottuſo l'angolo verticale di qualſivoglia triangolo per l'aſſe *BAD*, o *EAF*, o *PAL*; poſſono però darſi i triangoli fuori dell'aſſe, o minori di ciaſcuno de'detti, o maggiori del maſſimo *FAE*, o pure al medeſimo uguali. Perciocchè facendo paralella ad *EF* la retta *GO*, ordinata al diametro *BD* in *H*, e conducendo un piano ſopra la medeſima pel vertice *A*, ſe ſi faccia il triangolo *GAO*, che ſarà equicrure, e la di cui perpendicolare ſarà la retta *AH*, può ſegui-

seguire, che la ragione di *AH* all' asse *AC* sia uguale, o maggiore della ragione d'*EF* a *GO*, o pure di *CE* a *GH*, paragonandosi con quelle; laonde sarebbe in quel caso il triangolo *GAO* uguale, o maggiore del triangolo *ABF*, che è il massimo di tutti i triangoli condotti per l'asse *AC*.

Ma basti l' avere accennato quelle proprietà, che convengono alle Sezioni triangolari del Cono. Or passiamo a vedere le Curve Sezioni, che Coniche propriamente s'addomandano.

PROPOSIZIONE I.

Se il Cono ABD, *o pure il contrapposto al suo Vertice, si seghi con un piano paralello alla base* BED, *la Sezione* FHG, *o pure* fgh, *sarà un Cerchio.* FIG. 9.

SI tiri l'asse *AC*, che s'incontra col piano segante nel punto *L*, e per l' asse si tagli il medesimo Cono col piano triangolare *ABD*, la di cui Sezione *FG* comune all'altro piano segante, sarà paralella al diametro della base *BD* (a); preso qualsivoglia punto *H* nel perimetro della Sezione, e congiunta al vertice l' *AH*, si prolunghi fino al punto *E* nella circonferenza della base, e si tirino *EC*, *HL*: E poichè le medesime sono Sezioni comuni del piano del triangolo *ACE* con i piani paralelli *BED*, *FHG*, perciò i triangoli *ACE*, *ALH* sono simili: e simili parimente sono i triangoli *CBA*, *LFA*; onde sarà *CE* ad *LH*, come *CA* ad *LA*; ma come *CA* ad *LA*, così *BC* ad *FL*; dunque *CE*, ad *LH*, come *BC* ad *FL*: ma il raggio *CE* uguaglia il raggio *BC*; dunque ancora *LH* uguaglia *FL*. E nella medesima maniera dimostreremo, che

(a) 16. dell' 11. degli Elem.

che qualsivoglia retta condotta da qualunque punto del perimetro di questa Sezione al punto *L*, è uguale all' istessa *FL*. Dunque la Sezione *FHG* è un cerchio, il di cui centro è *L*, essendochè tutte le rette condotte da esso al perimetro della Sezione, dimostrar si possono uguali. Il che &c.

COROLLARIO.

Quindi è manifesto, che l'asse del Cono *AC*, passa pel centro *L* di qualsivoglia Cerchio, che parallelo alla base seghi il Cono; il simile accade eziandio nel Cono opposto *a g f*.

PROPOSIZIONE II.

FIG. 10. *Se il Cono Scaleno* ABED *sia segato col piano* ABD, *che passi per l' asse perpendicolare alla base; e di poi si seghi con un altro piano* KHM *perpendicolare al detto piano* ABD, *per mezzo della linea* KM, *che faccia il triangolo* KAM *simile all' istesso triangolo* ABD, *ma posto subcontrariamente, in modo cioè, che l' angolo* AKM *uguagli l'*ADB, *onde ancor l' angolo* AMK *uguaglierà l' altro* ABD *per essere l' angolo* A *comune all' uno, e all' altro triangolo; anco la Sezione* KHM *sarà un Cerchio.*

PRendasi nel Perimetro della Sezione qualunque punto *H*, e quindi si tiri l' *HI* perpendicolare al piano *ABD*, che caderà nella comun Sezione de' piani *KM* (a), e per il punto *I* tirisi *FIG* paralella al diametro della base *BD*, e per l' istessa *FG*, *HI* si conduca il piano *FHG*, che sarà paralello al piano della base, che passa

(a) 38. dell' 11. degli Elem.

sa per *BD*, e per *ER* a questa perpendicolare, le quali saranno paralelle all' istesse *FG*, *HI* (a). Laonde la Sezione *FHG* sarà un cerchio (b) il di cui centro *L* è nell' asse, dove taglia il diametro *FG*; dipoi tagliata per mezzo la *KM* in *O*, si congiungano *HL*, *HO*; sarà il quadrato *HL* uguale al quadrato dell' altro raggio *GL*, cioè al rettangolo *FIG* insieme col quadrato *LI* (c); ma il medesimo quadrato *HL* è uguale a' quadrati *HI*, *LI*, dunque il quadrato *HI* è uguale al rettangolo *FIG*. Ma per essere l' angolo *AKM* uguale ad *ADB*, e perciò anche ad *MGI* angolo esterno delle paralelle, e gli angoli al vertice *I*, *KIF*, *GIM* uguali, sono simili i triangoli *FIK*, *GIM*; onde *KI* ad *IF* stà come *GI* ad *IM* (d), e perciò il rettangolo *FIG* è uguale al rettangolo *KIM* (e) dunque il quadrato *HI* uguaglia anche il rettangolo *KIM*: ed aggiunto il quadrato *IO*, saranno i quadrati, *HI*, ed *IO* uguali al rettangolo *KIM* col quadrato *IO*; cioè il quadrato *OH* sarà uguale al quadrato *OM*; adunque la retta *OH* uguaglia la retta *OM*; e l' istesso dimostrerassi di qualunque retta, tirata da un altro punto del perimetro *KHM* al medesimo punto *O*; dunque ancor questa Sezione è un cerchio, il cui centro è il punto *O*. Il che bisognava &c.

(a) 15. dell' 11. degli Elem.

(b) per la precedente.

(c) 5. dell' 2. degli Elem.

(d) 4. del 6. degli Elem.

(e) 16. del 6. degli Elem.

COROLLARJ.

I. Quindi si ricava, che nel Cerchio il quadrato della perpendicolare, tirata da qualsivoglia punto della circonferenza al diametro, è uguale al rettangolo delle parti del diametro, tagliate da essa; cioè il quadrato *HI* è uguale al rettangolo *FIG* nel cerchio *GHF*; e vicever-

sa se in una qualche figura *KHM* il quadrato di qualsisia perpendicolare *HI*, tirata dal perimetro alla base, è uguale al rettangolo *KIM*, fatto dalle parti della base, quella figura sarà un cerchio, il diametro del quale è la base medesima *KM*.

II. Se il piano segante non sia paralello alla base, nè tagli il triangolo subcontrariamente posto, simile al triangolo per l'asse, è retto alla base, la Sezione non potrà mai essere un cerchio; imperocchè per la disugualità degli angoli i triangoli *FKI*, *MGI* non saranno simili, nè sarà *KI* ad *IF*, come *GI* ad *IM*; onde il rettangolo *FIG*, o pure il quadrato *HI* non uguaglierà il rettangolo *KIM*; e aggiunto il quadrato *IO*, non sarà il quadrato *OH* uguale al quadrato *OM*, e per conseguenza i raggj non saranno uguali.

III. E poichè in tal Sezione subcontraria i triangoli per l'asse *AKM*, *BAD* sono simili, perciò sta *DA* ad *AB*, come *AK* ad *AM*, i rettangoli *DAM*, *BAK* s'uguagliono, e potrebbe passare un cerchio per i punti *B*, *K*, *M*, *D*. Inoltre tirata *BN* paralella alla medesima *KM*, il cerchio circoscritto al triangolo *DNB* sarebbe toccato dal lato *AB* nel punto *B*; imperocchè per la somiglianza de' triangoli *ADB*, *ABN* sta *AD* ad *AB*, come *AB* ad *AN*; onde ne risulta il quadrato *AB* uguale al rettangolo *DAN*, e perciò *AB* diventa tangente del cerchio, che passa per i punti *B*, *N*, *D* (a).

(a) 37. del 3. degli Elem.

IV. Inoltre, perchè tutte le Sezioni fatte con piani paralelli al cerchio *KHM* saranno parimente cerchj, tirata l'*AO* dal vertice *A* del Cono al centro *O*, passerà per i centri di tutti i cerchi paralelli al detto *KHM*; perocchè segherà

per

per mezzo tutte le linee paralelle a *KM*, siccome essa, e *BN* sono segnate per mezzo ne' punti *O*, ed *S*: onde la retta *AO* sarà un altro asse di questo cono, benchè divida il diametro della base disugualmente in *R*. Dal che si conosce, che ne' Coni scaleni saranno due assi condotti amendue per i centri de' cerchj corrispondenti, a differenza de' Coni retti, ne' quali un solo asse ritrovasi.

V. E questo asse secondario taglierà il diametro della base in *R*, di modo, che stia *BR* a *RD*, come il quadrato del lato *AB* al quadrato *AD*, o pure come il quadrato della retta *AN* al quadrato del lato *AB*: l'asse poi primario *AC* taglierà il diametro del cerchio subcontrariamente posto, come *BN* è segata in *Q*, di modo che stia *BQ* a *QN*, come il quadrato *AB* al quadrato *AN*, e perciò *BR* ad *RD*; sarà come *NQ* a *BQ*. Imperocchè tirata *NPT* paralella a *BD*, saranno simili i triangoli *BSR*, *NST*, e siccome *BS* uguaglia *SN*, così *BR* uguaglierà *NT*; dunque sarà *BR* ad *RD*, come *NT* ad *RD*, cioè come *AN* ad *AD*, le quali sono, come il quadrato *AB* al quadrato *AD*, essendosi dimostrate *AN*, *AB*, *AD* continuamente proporzionali (a): e similmente sarà *BQ* a *QN*, come *BC* ad *NP*, per esser simili i triangoli *BQC*, *PNQ*, o pure come *DC*, uguale a *BC*, ad *NP*, cioè come *DA*, ad *AN*, cioè come il quadrato *AB* al quadrato *AN*.

(a) Coroll. 3. di questa.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 11.

Se il Cono ABD *sia tagliato da un triangolo condotto per l'asse, e da qualsivoglia punto* H *della superficie Conica, si tiri una retta* HIL *parallella*

lella ad un' altra EF, che sia perpendicolare al diametro BD *della base del Cono; dico, che tal retta* HIL *s' incontrerà col piano del detto triangolo per l' asse, ed indi stenderassi all' altra parte della superficie Conica in* L, *sicchè nel concorso* I *col piano del triangolo venga divisa per mezzo, che vale a dire risulti* HI *uguale ad* IL.

IMperocchè congiunta dal vertice *A* del Cono la retta *AH*, si prolunghi tanto fino, che s'incontri nella periferia della base in *M*, e dal punto *M* tirata nel piano della base la retta *MKG* paralella all' istessa *EF*, che seghi il diametro perpendicolarmente, e divisa da esso per mezzo in *K*, congiungasi ancora *AG*, che per essere nella superficie Conica concorrerà nel punto *L* con la stessa retta *HIL*: perciocchè essendo *HL*, *MG* paralelle alla terza *EF*, sono paralelle anche fra loro, e per questo sono amendue nel medesimo piano del triangolo *AMG* (a); e giunta l' *AK* sarà essa la comune Sezione del piano del triangolo *BAD* per l' asse, e del piano dell' altro triangolo *AGM*, sicchè passerà per il punto I comune all' uno, e altro piano. Perchè dunque sarà *MK* ad *HI*, come *KA* ad *AI*, e come *GK* ad *IL*, ed *MK* uguaglia *GK* (b), ancora *HI* sarà uguale ad *IL* (c), dunque *HL* vien divisa pel mezzo dal piano per l' asse. Il che &c.

(a) 9 dell' 11. degli Elem.
(b) del 3. degli Ele.
(c) 14. del 5. degli Elem.

COROLLARJ.

FIG. 12.

I. Quindi raccogliesi, che se un Cono tagliato dal triangolo per l'asse, si tagli di nuovo con un altro piano, che passi per la retta *MG* perpendicolare ad diametro della base, de' quali due

piani

piani la comune Sezione sia la retta *NK*, questa taglierà per mezzo tutte le linee, come *HL*, tirate paralelle all'istessa *MG* nella medesima Sezione:

II. Che se la medesima retta *MG*, per cui conducesi il piano *GNM*, non solamente sia perpendicolare al diametro *BD*, ma eziandio al piano del triangolo per l'asse (il che accade quando il triangolo per l'asse è retto al piano della base) in tal caso le rette *MG*, *HL*, non solo vengono tagliate per mezzo dalla Sezione comune *KN*, ma ancora ad angoli retti: Imperocchè non solamente allora sarà retto l'angolo *MKD*, ma l'angolo altresì *MKN*, ed *HIN*, che l'ugnaglia. Ma quando la retta *MKG* non sarà perpendicolare al piano del triangolo, per l'asse, o pure quando il triangolo per l'asse non sarà retto al piano della base, col passare per una retta tirata dal vertice *A* del Cono, perpendicolare alla base, allora certamente *NK* segherà per mezzo quelle rette paralelle *HL*, *MG*, ma le segherà ad angoli obliqui, e non retti, secondo l'inclinazione della linea *MK*, all'istessa *KN*.

SECONDE DEFINIZIONI.

I. LA linea *NK*, che taglia per mezzo tutte le rette *HL*, tirate in qualunque Sezione *GNM* paralelle a una istessa *MG*, chiamerassi il *Diametro* di tal Sezione. FIG. 13. 14. 15. 16.

II. E il termine *N* del diametro (ovvero *Q* se vi sia un altro termine *Q* ad esso contrapposto) dirassi il *Vertice* della Sezione.

III. Le rette tagliate dal diametro *HL*, *MG* (o pure le loro metà *HI*, *MK*) si chiamino *Ordinate* allo stesso diametro *NK*.

IV. Che

IV. Che se il diametro, che taglia per mezzo l'ordinate, le tagli anche ad angoli retti, oltre il suo nome generale di *Diametro*, acquisterassi in tal caso il nome particolare di *Asse*.

Altre definizioni si porranno in alcune delle Proposizioni seguenti, e in alcuni de' loro Corollarj.

PROPOSIZIONE IV.

TAV. II. FIG. 17.

Se il Cono ADMB *segato da un piano per l'asse, si seghi da un altro piano* MNG, *che passi per la retta* MG *perpendicolare al diametro della base circolare, e da esso divisa per mezzo in* K, *e per la retta* KN *paralella a uno de' lati* AB *del triangolo per l'asse, saranno in così fatta Seziane i quadrati dell'ordinate* MK, HI *proporzionali all'ascisse porzioni del diametro* NK, NI *dal vertice* N *della Sezione. Chiamisi tal Sezione* Parabola.

Tirata per qualunque punto *I* della comune Sezione *KN*, a cui è ordinata *HIL*, la retta *PIV*, paralella al diametro della base *BD*; se si conduca per l'istesse *VP*, *HL* il piano *PHV*, che sarà paralello alla base, che passa per le rette *BD*, *MG* paralelle all'altre due, sarà un cerchio, onde ne risulterà il quadrato *HI*, uguale al rettangolo *PIV*, conforme il quadrato *MK* è uguale al rettangolo *BKD*, (a) così il quadrato *HI*, sarà uguale al rettangolo *PIV*; dunque il quadrato *MK* al quadrato *HI* sta come il rettangolo *BKD* al rettangolo *PIV*, cioè come *KD* ad *IV*, per essere *BK* uguale a *PI*, atteso il paralellogrammo *BPIK* compreso dalle linee opposte paralelle: ma *KD* sta ad *IV*, co-

(a) Coroll. 1. della Prop. 2.

IV, come KN ad IN, a cagione de' triangoli simili NKD, NIV; dunque i quadrati dell' ordinate MK, HI sono come le parti del diametro NK, NI ascisse dal vertice; Il che &c. Or sì fatta Sezione, in cui tal proprietà riconoscesi, si chiama *Parabola*.

COROLLARJ.

I Quindi è, che se si ponga NK a KM, come KM ad un' altra NF, applicata ad angoli retti al vertice N del diametro NK; siccome il quadrato MK sarà uguale al rettangolo KNF, così il quadrato di qualunque altra ordinata HI sarà uguale al rettangolo INF; perciocchè a cagione dell' altezza comune NF i suddetti rettangoli stanno fra loro, come le ascisse KN, IN, e perciò come i quadrati dell' ordinate MK, HI, che sono all' ascisse proporzionali. E tal linea costante NF chiamasi dagli antichi *lato retto*, e da moderni *Parametro della Parabola*.

II. Tirata parimente NE paralella al diametro della base del Cono, e terminata da' lati del triangolo per l' asse, se si faccia come NK a KD, o pure come AE ad EN, così EN, ad NF, sarà la medesima NF il lato retto, o Parametro dell' istessa Parabola. Imperciocchè BK uguale ad EN (atteso il paralellogrammo $BENK$) sarà ad NF, come AE ad EN; o pure come NK a KD (per i triangoli simili AEN, NKD;) Laonde il rettangolo BKD, cioè il quadrato MK, sarà uguale al rettangolo KNF.

III. Il medesimo parametro NF può ritrovarsi se pongasi, come il rettangolo BAD de'

lati del triangolo per l' asse al quadrato della base *BD*, così *AN* ad *NF*. Imperocchè il rettangolo *BAD* al quadrato *BD* stà come il rettangolo *EAN* al quadrato *EN*, per essere queste linee proporzionali a quelle: ma il quadrato *EN* è uguale al rettangolo di *EA* in *NF* parametro, mediante le linee *EA*, *EN*, *NF* continue proporzionali (a); dunque il rettangolo *BAD* al quadrato *BD* stà come il rettangolo *EAN* al rettangolo di *EA* in *NF*, e perciò come *AN* ad *NF*, attesa la comune altezza *EA* di questi rettangoli.

(a) *Per il Corollar. preced.*

PROPOSIZIONE V.

FIG. 18. *Poste le stesse cose come sopra nel titolo precedente, ma la Sezione comune del triangolo per l' asse, e del piano segante condotto per la retta* MKG, *perpendicolare al diametro della base, non già paralella a uno de' lati del triangolo per l' asse, ma inclinata per modo, che concorra nel punto* N *col lato* AD *sotto al vertice* A *del Cono, e nel punto* Q, *con l' altro lato* AB *sopra al vertice* A; *saranno i quadrati dell' ordinate* MK, HI *della Sezione* MNG, *come i rettangoli* QKN, QIN *compresi dalle parti del diametro, intercette fra le medesime ordinate, e i due termini* NQ *dell' istesso diametro. E prolungato il medesimo piano all' altra superficie Conica opposta, ne risulterà una simile Sezione* l Q b; *sicchè i quadrati delle sue ordinate o paragonati fra loro, o con i quadrati dell' ordinate della Sezione inferiore* MNG, *saranno parimente come i rettangoli compresi dalle parti del diametro intercette fra l' ordinate, e fra l' uno, e l' altro vertice* QN.

Si chiamino amendue *Sezioni opposte*; e ciascuna di esse *Iperbole*, e la porzione N Q del diametro interposta fra i due vertici, chiamisi *lato trasverso*.

Tirisi per il punto I, dove qualsivoglia ordinata HI è applicata al diametro NK di questa Sezione, la retta PV parallela al diametro della base BD, certamente il piano, che passa per le rette VP, HIL, per essere parallello alla base DMB, formerà il cerchio IVP; onde il quadrato MK al quadrato HI sarà come il rettangolo BKD al rettangolo PIV, la ragione de' quali è composta della ragione di BK a PI, (che è la medesima di KQ a QI) e della ragione di DK ad VI (che è l' istessa di KN ad NI) siccome la ragione del rettangolo QKN al rettangolo QIN è composta delle medesime ragioni (a): laonde il quadrato MK al quadrato HI sta come QKN a QIN. E il medesimo dimostrerassi dell' ordinate della superiore Sezione opposta l Q q: onde si è provato l' assunto. Chiamasi l' una, e l' altra di queste Sezioni opposte *Iperbole*; e la porzione QN del diametro *Lato trasverso*.

(a) 23. del 6. degli Elem.

COROLLARJ.

I. Se si faccia NK a KM, come KM a KZ, applicata ad angoli retti nel punto K al diametro NK, e congiunta QZ, si prolunghino ad essa le rette NF, IS parallelle alla KZ; l' istessa NF tirata dal vertice N, sarà *il lato retto*, o *il parametro* dell' Iperbole: e sarà questo dotato di tal proprietà, che siccome il quadrato di MK, media proporzionale fra NK, e KZ, è uguale al rettangolo NKZ, applicato allo stesso

parametro *NF*, ma con l' eccesso del rettangolo *FTZ*, simile al rettangolo *QNF*, che vien compreso dal lato *QN* trasverso, e dal retto NF; similmente il quadrato di qualunque altra ordinata *HI* uguaglierà il rettangolo *NIS* applicato allo stesso parametro *MF* (ma tirata *FRT* paralella ad *NK* segante *IS*, *KZ* ne' punti *R*, *T*) con l'eccesso del rettangolo *FRS*, simile parimente al detto rettangolo *QNF*. Imperocchè essendo *KZ* ad *IS*, come *KQ* a *QI*, se aggiungesi di quà, e di là la ragione di *KN* ad *NI*, sarà il rettangolo *ZKN* al rettangolo *NIS*, come il rettangolo *QKN*, a *QIN*, o pure come il quadrato *MK* al quadrato *HI*; onde siccome il quadrato *MK* è uguale al rettangolo *ZKN*, così il quadrato *HI* è uguale al rettangolo *NIS*.

II. Parimente se si faccia, come *NK* a *KB*, così *KD* a *KZ*, congiunta, come sopra, la *QZ*, con cui concorra in *F* la retta *NF* paralella all' istessa *KZ*, sarà l'istessa *NF* il parametro. Imperocchè il rettangolo *ZKN* sarà uguale a *BKD*, e perciò al quadrato *KM* (come nel precedente Corollario;) onde ancora *SIN* sarà uguale al quadrato *HI*.

III. Similmente ritirata *NE* paralella a *BD*, se si faccia come a *KD*, così *NE* a *NF*, sarà questa il parametro: imperocchè giunta la *QF*, e prolungata per modo, che tagli ne' punti *S*, *Z* le rette *IS*, *KZ*, paralelle alla medesima *NF*, sarà tanto la ragione di *BK* a *NE*, quanto la ragione di *KZ* a *NF*, uguale alla ragione di *KQ* a *QN*; onde sarà *BK* a *KZ*, come *NE* a *NF*, ovvero come *NK* a *KD*; e perciò il rettangolo *BKD* (che è uguale al quadrato *MK*) uguaglierà come sopra il rettangolo *NKZ*.

IV. E condotta dal vertice del Cono *A* nel

piano

piano del triangolo per l' asse la retta AO paralella a' NK; poichè, come nel Corollario precedente FN ad NE sta come KD a NK, o pure come DO ad OA, e similmente NE a NQ, sta come OB ad OA; sarà FN a NQ in ragion composta di DO ad OA, e di BO ad OA, cioè come il rettangolo DOB al quadrato OA; onde facendo come il quadrato OA al rettangolo DOB, così QN lato trasverso a N F, sarà questo il latto retto, ovvero il Parametro.

V. Inoltre tirata dal vertice del Cono l' AT paralella al diametro DB della base, e concorrente col lato trasverso NQ nel punto T, sarà il rettangolo QTN al quadrato AT, come il lato trasverso NQ al retto NF: Imperocchè essendo NT a TA, come NK a KD, o pure come AO ad OD; e QT a TA, come AO ad OB, sarà il rettangolo QTN al quadrato AT, come il quadrato AO al rettangolo DOB, e perciò come QN ad NF (a).

VI. Finalmente il quadrato di qualsivoglia ordinata MK al rettangolo QKN, o pure il quadrato HI al rettangolo QIN, starà come il lato retto NF al trasverso NQ: Imperocchè anco il rettangolo ZKN uguale al quadrato MK, sta al rettangolo QKN, come ZK a QK, attesa la comune altezza NK; e il rettangolo SIN uguale al quadrato HI sta al rettangolo QIN, come SI a QI: ma queste ragioni di ZK a QK, o di SI a QI sono l' istesse, che la ragione del lato retto NF al trasverso NQ; dunque i quadrati dell' ordinate, e i rettangoli compresi dalle parti corrispondenti del diametro, sono come il Parametro, o il lato retto al lato trasverso.

(a) per il Corollario preced.

PROPOSIZIONE VI.

FIG. 19. *Che se KN Sezione comune del triangolo per l' asse, e del piano segante, che passa per la retta MKG, ordinata al diametro BD della base, o pure al diametro d' un altro cerchio paralello, concorra con amendue i lati sotto il vertice A ne' punti N, Q, saranno i quadrati dell' ordinate MK, HI di questa Sezione QHN, come i rettangoli delle parti del diametro tagliato dall' istesse ordinate fra l' uno, e l' altro termine QN, cioè come QKN a QIN. E tal Sezione (se non sia paralella alla base, nè posta subcontrariamente, che perciò non sarà un cerchio) chiamerassi con nome speciale Ellisse, e l' istessa QN sarà parimente il suo lato trasverso.*

Con l' istessa dimostrazione, con cui si è provata l' antecedente Proposizione, si prova ancor questa; onde non fa di mestieri adesso il ripeterla, bastando, che da' Lettori la medesima si adatti a questa figura.

COROLLARJ.

I. Se si faccia NK a KM come KM a KZ applicata ad angoli retti al diametro *QN* nel punto *K*, e giunta *QZ*, che taglia in *F* la retta *NF* paralella all' istessa *KZ* a cui parimente tirisi *IS* paralella, e corrispondente a qualunque altra ordinata *HI*; sarà *NF* il lato retto, o Parametro di questa Sezione, e i quadrati di qualunque ordinata *MK*, *HI* saranno respettivamente uguali ai rettangoli *ZKN*, *SIN*, che sono applicati al Parametro *NF*, ma col difetto de' rettangoli *ZYF*, *SRF* simili al rettangolo *QNF*

com-

compresa dal lato trasverso QN, e dal retto NF (ciò che chiaro apparisce, tirando la retta FRT paralella a NQ, e segante le rette KZ, IO ne' punti RR.) E ciò provasi nell' istessa maniera, che nel Corollario I. della Proposizione precedente, cangiando in difetto l' eccesso de' rettangoli applicati al parametro, uguali a' quadrati dell' ordinate all' Iperbole, che da tale eccesso prende il nome, siccome l' Ellisse dal difetto.

II. Parimente se facciasi come NK a KB, così KD a KZ, giunta la QZ, che tagli NF in F, determinerà il Parametro (a).

III. Similmente facendo NK, a KD, come NE, paralella a BD, ad NF, sarà questa il lato retto (b).

IV. Tirata parimente l' AO paralella a NQ, sarà come il quadrato AO al rettangolo DOB, così il lato trasverso QN al retto NF (c).

V. E similmente tirata l' AT paralella a BD, che convenga in T con QN, sarà il rettangolo QTN al quadrato AT, come il lato trasverso QN al retto NF (d).

VI. Qualsivoglia quadrato dell' ordinata al rettangolo contenuto dalle parti del diametro, come sarebbe il quadrato MK al rettangolo QKN, o pure HI a QIN, sta come il lato retto NF al trasverso NQ (e).

(a) Coroll. 2. della prop. preced.

(b) Coroll. 3. della prop. preced.

(c) Coroll. 4. della prop. preced.

(d) Coroll. 5. della prop. preced.

(e) Coroll. 6. della prop. preced.

PROPOSIZIONE VII.

Se in un Cono medesimo ABD si taglino per i piani tra di loro paralelli MNG, SVR due Parabole, o due Iperbole, o due Ellissi, o quant' altre mai se ne vogliano, saranno i loro Parametri, o lati retti NF, VT proporzionali allo di- FIG. 20. 21. 22.

stanze NA, VA *de' loro Vertici* N, V *dal Vertice* A *del Cono*.

(a) *Coroll. 1. della prop. 4. Coroll. 3. della prop. 5. 6.*

IMperocchè sta NK a *KD*, come EN al parametro NF (a), e parimente sarebbe come *VO* ad *OD*, così *PV* ad *VT*, parametro dell' altra Sezione paralella alla prima; laonde per esser la ragione di NK a *KD* l' istessa, che la ragione di *VO* ad *OD*, attese le parallele NK, *VO*, sarà eziandio la ragione di EN ad NF l' istessa, che di *PV* ad *VT*; e permutando, sarà NF ad *VT* come EN a *PV*, ovvero come N*A* ad *VA*. Il che &c.

COROLLARIO.

Nell' Iperboli, e nell' Elissi, poichè anche i lati trasversi *Q*N, *VL*, sono come le distanze dal vertice del Cono N*A*, *VA*, saranno parimente i lati retti NF, *VT* proporzionali a' trasversi *Q*N, *VL*: e per questo tali Sezioni dedotte dal medesimo Cono con piani paralelli, si dicono *Simili*. Ma le Parabole sono sempre simili, come quelle, che avendo il diametro pararello a uno de' lati del Cono, possono sempre condursi tagliate da un Cono medesimo con piani paralelli.

PROPOSIZIONE VIII.

FIG. 23. 24. 25.

In ogni Sezione Conica, se il lato retto NF *posto perpendicolare al diametro venga diviso per mezzo in* R, *tirata la* RT; *che sia nella Parabola paralella al diametro, e nell' altre Sezioni tagli per mezzo in* C *il diametro trasverso* QN; *Dico, che il quadrato di qualsivoglia ordinata* MK *sarà doppio del quadrilatero corrispondente* NRTK, *che*

vien

vien compreso dalla retta KT *paralella alla medesima* NF, *e dall' altre già dette linee.*

IMperocchè tirisi la retta *FB* paralella, nella Parabola, al diametro, ma che nell' altre Sezioni congiunga il termine F del lato retto coll' altro termine *Q* del trasverso, onde in tutte e tre le Sezioni sarà paralella all' istessa *RT*; per essere nell' Iperbole, e nell' Ellisse, *QN*, in *C*, ed *NF* in *R* tagliate pel mezzo; e nella Parabola amendue le *FB*, *RT* paralelle al diametro; dipoi giunta *NB*, sarà tagliata per mezzo in *S* dalla medesima *RT*, siccome *NF* è tagliata dalla medesima in *R*. Laonde i triangoli *NSR*, *SBT*, che insieme co' lati uguali *NS*, *SB*, hanno uguali anche gli angoli al vertice *S*, e gli angoli alterni delle paralelle, saranno fra loro uguali; e aggiunto di comune il quadrilineo *NSTK*, sarà il triangolo *NKB* uguale al quadrilatero *NRTK*; ma per la natura delle Sezioni è manifesto, che il quadrato dell' ordinata *MK* è uguale al retangolo *NKB*, e perciò al doppio del triangolo *NKB*; dunque lo stesso quadrato dell' ordinata è doppio del quadrilatero *NRTK*. Il che &c.

Quel punto *C*, che nell' Iperbole, e nell' Ellisse taglia per mezzo il lato trasverso *QN*, si chiamerà il *Centro* di queste Sezioni. La retta *QF*, o *FB* *Regolatrice*; e *CR*, o *RT* (e ciò nella Parabola ancora) *Semiregolatrice* potrà chiamarsi.

COROLLARIO.

L'eccesso del quadrato di qualunque ordinata PF sopra il quadrato d'un' altra ordinata MK, sarà uguale al doppio eccesso del quadrilatero NRXV sopra NRTK, cioè al doppio del quadrilineo KVXT: e tirata MG paralella al diametro, quell'eccesso de' quadrati è il rettangolo PGD (a). Laonde tal rettangolo è uguale al doppio KVXT.

(a) 5. del degli Elem.

PROPOSIZIONE IX.

A qualsivoglia data Sezione del Cono tirare una tangente da un punto dato nel di lei perimetro.

TAV. III. FIG. 26. 27. 28.

SE il dato punto è nel vertice N della Sezione, tirata NE paralella all'ordinate, sarà la tangente; Imperocchè se dal punto N venisse a cadere dentro la Sezione, formerebbe una corda da una sol banda del diametro, onde il diametro non taglierebbe per mezzo tutte le paralelle poste tra la Sezione all'ordinate; il che s'oppone alla prima delle definizioni seconde; dunque tal retta tocca nel dato punto la Sezione. E se il dato punto non è nel vertice, ma nel perimetro della Sezione, come sarebbe in M; allora tirata RT semiregolatrice, si ponga MK ordinata al diametro della Sezione, e KT paralella al semiparametro NR, prolungandola sino alla semiregolatrice in T, e nel diametro sopra all' ordinata pongasi KG terza proporzionale all'istesse KT, MK, e congiunta GM, sarà questa la tangente della Se-

zio-

gione. Imperciocchè si tiri la retta GT, e si ordini al diametro qualunque altra RL, che concorra con l'istessa GM in P; e si conduca LV paralella a KT, che tagli la semiregolatrice in V, e la retta GT in D. Perchè dunque KT, KM, KG sono tre proporzionali, il rettangolo GKT è uguale al quadrato MK, e perciò doppio del quadrilatero NRTK (a), ma lo stesso rettangolo è ancor doppio del triangolo GKT; dunque questo triangolo è uguale al detto quadrilatero. E perchè come TK a KG, così sta DL a LG, e come GK a KM, così sta GL a LP; siccome sono proporzionali TK, KM, KG, così ancora saranno continuamente proporzionali DL, LP, LG; onde il quadrato LP sarà uguale al rettangolo DLG, o pure doppio del triangolo DLG, siccome il quadrato dell' ordinata RL è doppio del quadrilatero NLVR. Ma il triangolo DLG sarà sempre maggiore del quadrilatero NLVR; perchè se LH è ordinata di sotto alla MK aggiugnesi al triangolo GKT il trapezio KLDT maggiore del quadrilatero KLVT, che aggiugnesi a NKTR; se poi hl è ordinata di sopra alla MK, dal triangolo GKT si toglie il trapezio lKTd minore del quadrilatero lKTu, che toglies dall' istesso NKTR; onde il triangolo DLG risulta sempre maggiore del quadrilineo NLUR, o pure il triangolo dlG del quadrangolo NluR. Pertanto il quadrato PL è maggiore del quadrato RL, e il quadrato pl è maggiore del quadrato bl; onde qualsivoglia punto P, o p della retta GM, eccettuato il punto M, è fuori della Sezione, e perciò GM è la sua tangente. Il che ec.

(a) per la Propos. 8.

La porzione KG del diametro, che resta inter-

tercetta fra l' ordinata, e il concorso della tangente, chiamasi *Sottangente*.

COROLLARJ.

I. Quindi è chiaro, che la tangente di queste Sezioni conviene con la loro curva in un sol punto.

II. Prolungata *KT* fino alla regolatrice *FB* nel punto *B*, poichè per natura di queste Sezioni, il rettangolo *NKB* è uguale al quadrato dell' ordinata *MK* (a), e questo quadrato è uguale al rettangolo *GKT*, sarà *NKB* uguale a *GKT*; e perciò la sottangente *GK* a *NK*, ascissa dal vertice, sarà come *KB* a *KT*; onde potrà ancora determinarsi la tangente del dato punto *M*, se si faccia come *KT* a *KB*, così *KN* a *KG*; e tirata al punto *M* la *GM*, sarà essa la tangente.

(a) *Coroll. 1. della propos. 4. 5. 6.*

III. E per conversion di ragione, sarà come *KB* a *BT*, che è la metà del parametro (per essere *BT* uguale a *RF*, o pure *NR*) così la sottangente *KG* a *GN*, intercetta fra la tangente, e il vertice della Curva.

IV. Parimente dividendo, sarà *KT* a *TB* uguale al semiparametro, come *KN* a *NG*.

V. Similmente se giungasi la *BR*, che concorra col diametro in *G*, sarà *KG* la sottangente, per essere *KB* ad *NR*, come *KG* a *GN* (b).

(b) *per il Coroll. 3.*

VI. Quindi nella Parabola la sottangente *KG* è sempre doppia di *KN* ascissa dal vertice per mezzo dell' ordinata, siccome ancora della rimanente *NG*, intercetta fra il vertice, e il concorso della tangente col diametro; perchè essendo la regolatrice *FB* paralella al diametro, la *KB* sempre uguaglia il parametro *NF*, e per-

e perciò la *KB* è sempre doppia del semiparametro *NR*, o *KT*, onde anco *GK* è doppia di *GN*, o *NK*.

VII. Ma nell' Iperbole, e nell' Ellisse, mercè delle paralelle *CT*, *QB*, è *QK* a *CK*, come *BK* a *KT*, e perciò come *GK* a *KN* (a): ondè se si faccia come *CK* distanza dell' ordinata dal centro a *QK*, distanza dell' istessa dal più remoto termine del trasverso, così *KN* distanza dal vertice più prossimo ad un' altra *GK*, sarà questa la ricercata sottangente.

(a) per il Coroll. 2.

VIII. Onde il rettangolo *QKN* sarà uguale al rettangolo *CKG* per essere *QK* a *CK*, come *GK* a *KN*.

IX. In oltre sarà per conversion di ragione *QK* a *CQ*, ovvero a *CN*, metà del lato trasverso, come la sottangente *GK* alla *GN*, intercetta fra il vertice, e la tangente.

X. E perchè *QG* a *GC* sta come *BG* a *GR*, attese la paralelle *QB*, *CR*, e *BG* a *GR* sta come *GK* a *GN*, attese la paralelle *KB*, *NR*, però sarà *QG* a *GC*, come *QK* a *CQ*, ovvero *CN*, essendo queste (b) nell' istessa ragione di *GK* a *GN*.

(b) per il Coroll. 9. preced.

XI. E dividendo sarà *QC* a *CG*, come *CK* a *CQ*, ovvero *CN*; onde, saranno in continua Proporzione *CK*, *CQ*, *CG*, o pure *CK*, *CN*, *CG*; e il rettangolo *KCG* sarà uguale al quadrato *CN*, o *CQ* del mezzo lato trasverso: sicchè troverassi la tangente, se prendasi *CG* terza proporzionale alle *CK*, *CN*, e giungasi al punto *M* la retta *GM*.

XII. Poichè *QK* a *CQ* sta come *GK* a *GN* (c), e *CQ* a *GQ* come *KN* a *GK* (essendo che l' una, e l' altra di queste ragioni è uguale alla ragione di *RB* a *BG*) sarà dunque per l' ugua-

(c) per il Coroll. 9.

ugualità di ragione perturbata QK a GQ, come KN a GN, e permutando QK a KN, come GQ a GN: onde il diametro dell' Iperbole, e dell' Elliffe resta tagliato in proporzione armonica da' termini del lato trasverso, concorso dell' ordinata, e della tangente; e perciò può determinarsi la tangente, facendo una tal sezione armonica, cioè determinando il punto G per modo, che come QK sta a KN, così sta GQ a GN.

XIII. Quindi ricavasi un' altra Regola generale per tirare dal dato punto M la tangente a qualunque Sezione Conica; imperocchè tirata l' ordinata MK, e dal vertice N la paralella ad essa NI, che sarà la tangente verticale; se dal punto M si tiri nella Parabola la MI paralella al diametro, e nell' Elliffe, e nell' Iperbole si congiunga coll' altro termine Q del trasverso la retta MQ, che tagli la tangente verticale in I; e per tutto si divida per mezzo in E la retta NI, giunta ME, sarà questa la tangente. Imperocchè se questa si prolunghi fino al diametro in G, è chiaro, che nella Parabola sarà GK doppia di GN, come MK uguale a NI è doppia di EN, (a); e però GM è la tangente. Ma nell' Iperbole, e nell' Elliffe tirata QO paralella all' istessa NE, che sarà tagliata in O dalla retta MG prolungata, sarà QO a NE, come QG a GN; ma nella stessa ragione sta QO ad IE, che è uguale a NE, e QO ad IE sta come QM ad MI, ovvero come QK a KN; dunque QG a GN, sta come QK a KN; onde il diametro è tagliato armonicamente nel punto G, e ne' termini del lato trasverso, e nel concorso dell' ordinata; adunque GM è la tangente (b).

(a) per il Coroll. 6.

(b) per il Coroll. 12.

XIV.

XIV. Qualsivoglia tangente dell' Iperbole MG sempre concorre col diametro di sotto il centro C, e sopra il vertice N; imperocchè QK è maggiore di KN, dunque ancor QG è maggior di GN, essendo queste rette fra loro proporzionali.

XV. Tirata dal centro C dell' Ellisse, e dell' Iperbole la retta CX paralella a NE, che concorra in X con MQ, è manifesto, che CX sarà la metà di IN (siccome CQ è la metà di QN) e però uguale a NE, o pure ad IE, e giunte le rette CE, XE, si formeranno i paralellogrammi $CXEN$, $CXIE$, $QXEC$. Laonde per tirare dal dato punto M una tangente, basterà giungere la retta MQ col più remoto termine Q del diametro, e condotta dal centro la retta CX paralella all' ordinarie, e fatto uno de' sopraddetti paralellogrammi, o porre XE paralella, ed uguale al semidiametro CN, che allora giungendo il punto M con l'angolo, o punto E per mezzo della retta ME, sarà questa la tangente.

XVI. Finalmente, se in qualsivoglia Sezione il diametro NK sia il suo asse, posta in esso nella parte opposta alla sottangente, KS uguale a KT, e congiunta SM, sarà questa perpendicolare alla curva. Imperocchè essa farà assieme con la tangente l'angolo retto SMG; conciossiachè per essere TK, o KS, che l' uguaglia, a KM, come KM a KG, sarà il quadrato MK uguale al rettangolo SKG, e perciò essendo MK perpendicolare all' asse GS, sarà rettangolo il triangolo SMG, la di cui normale MK è media fra segmenti della base SK, KG (a). L' istessa KS chiamisi subnormale, che nella Parabola sarà sempre uguale al semiparametro

FIG. 29. 30. 31.

(a) 8. del 6. degli Elem.

tro

tro *NR*, a cui è uguale *KT*; ma nell'Iperbole, e nell'Ellisse starà al semiparametro, come *CK* distanza dell'ordinata dal centro a *CN* semiasse trasverso, per essere in tal ragione *KT* a *NR*: o pure l'istessa subnormale *KS*, uguale a *KT*, sta a *CK* distanza dell'ordinata dal centro, come il lato retto *NF* al trasverso *QN*, attesi i triangoli simili *TKC*, *FNQ*.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 32. *Nella Parabola qualunque retta* MD *paralella al suo diametro* NK, *è un diametro anch'essa, che taglia per mezzo tutte le sue ordinate* HF, NZ *paralelle alla tangente* MG, *e i quadrati parimente delle sue ordinate* (HD, NX *sono come le ascisse* MD, MX *dal vertice* M *di tal diametro.*

Tirata dal vertice *N* del diametro *NK*, onde è generata la Parabola, la tangente *NE*, che concorra con *MD* in *I*, tirisi ancora *NXZ* paralella alla tangente *MG*, che concorra con la stessa *MD* in *X*, e con la curva in un altro punto *Z*: dipoi si tirino l'ordinate al diametro *NK*, cioè la retta *MK*, e *ZT*, che taglia *MD* in *V*. Per natura della Parabola sarà il quadrato *MK* al quadrato *ZT*, come *NK* a *TN* (a), o pure come il paralellogrammo *NKMI* ad un altro *NTVI* d'uguale altezza; ma i triangoli simili *GKM*, *NTZ* sono parimente come i quadrati de' lati omologhi *MK*, *ZT* (b); dunque questi triangoli stanno fra loro come i detti paralellogrammi: ma il triangolo *GKM* è uguale a *NKMI* attesa la base di quello *GK*, doppia della base di questo *NK* (c), e l'uguale altezza d'amendue; dunque anche il triangolo *NTZ* uguaglierà *NTVI*: e tolto dal-

(a) Prop. 4.

(b) per la 6. degli Elem.

(c) Coroll. 6. della prop. 9.

dall' uno, e dall' altro il comune trapezio *NXVT*, sarà il triangolo *XVZ* uguale al triangolo simile *XIN*; laonde s'ugnaglieranno anco i loro lati omologhi *XZ*, *XN*; dunque la retta *MD* taglia per mezzo in *X* la detta retta *NZ* paralella alla tangente *MG*. Similmente tirata di sopra a *NZ* qualunque altra paralella *HDF*, che tagli *NK* in *P*, ed *NI* in *Æ*, e ordinate al primo diametro *NK* le rette *HL*, *FB*, che taglino l' istessa *MD* ne' punti *R*, ed *S*; poichè il triangolo *PLH* al suo simile *GKM* sta come il quadrato *LH* al quadrato *KM*, cioè come *NL* a *NK*, o pure come *NLRI* a *NKMI*; siccome *GKM* è uguale a *NKMI*, così *PLH* sarà uguale a *NLRI*; e l' altro triangolo simile *PFB* sarà uguale anch' esso a *NBSI* per essere a' *GKM*, come il quadrato *FB* al quadrato *MK*, cioè come *BN* a *NK*, o pure come *NBSI* a *NKMI*; onde la differenza de' triangoli *PFB*, *PLH*, cioè il quadrilineo *LHFB*, sarà uguale alla differenza de' paralellogrammi *NBSI*, *NLRI*, ad essi triangoli uguali, cioè al paralellogrammo *LBSR*, e tolto di comune lo spazio *LBSDH* rimarranno i triangoli *DSF*, *DHR* uguali, che per essere ancora simili, averanno i lati omologhi *DF*, *DH* parimente uguali. Similmente tirata di sotto a *NZ* la retta *bf* paraella alla tangente *MG*, che tagli *NK* in *p*, ed *NI* in *e*, e ordinate le rette *bL*, *fb* al diametro *NK*, che taglino la suddetta *MD* ne' punti *Rf*, dimostrerassi il triangolo *bpL* uguale a *NLRI*; sicchè aggiugnendo all' uno, e all' altro *Lbf R*, sarà *bpbf R* uguale al paralellogrammo *Nbf I*, che uguaglierà il triangolo *pbf*, per la ragione di sopra addotta con le lettere simili; per la qual cosa essendo *bpbf R* uguale a *pbf*; tolto di comune, *pbfd* ne risulterà il triangolo *bdR* uguale e simi-

simile a fds, e perciò anche i lati omologhi bd, df saranno uguali. Dunque la retta MD taglia pel mezzo tutte le paralelle alla tangente MG; laonde anco MD rispetto a queste ordinate è un diametro. E perchè per essere GN uguale a NK, o pure a IM sono uguali i triangoli simili GEN, IEM, posto di comune $NEMX$ sarà il triangolo INX uguale al paralellogrammo $GNXM$: parimente posto di comune $NEMSB$ agli stessi triangoli GEN, IEM, il quadrilineo $GMSB$ risulta uguale al paralellogrammo $INBS$, che dimostrammo essere uguale al triangolo PBF; dunque tolto da questo triangolo, e da $GMSB$ il trapezio $PDSB$, avremo il triangolo DSF uguale al paralellogrammo $GPDM$; laonde il triangolo INX, o l' uguale ad esso XVZ, sarà al triangolo simile DSF, e però ancora il quadrato XZ sarà al quadrato DF, ovvero il quadrato NX al quadrato HD, come il paralellogrammo $GNXM$ a $GPDM$, o pure come XM a DM. Il che bisognava &c.

Corollarj.

I. Quindi ciò, che s' è detto rispetto al primario diametro NK, e le sue ordinate può riferirsi a qualunque altro diametro MD, o sia circa la tangente NI, di cui la sottangente XI sarà doppia parimente dell' ascissa MX, o sia circa il parametro, o lato retto da determinarsi per quest' altro diametro MD, che sarà terza proporzionale a qualunque ascissa MD, e sua ordinata DF, dimodochè il quadrato di qualunque ordinata sia uguale al rettangolo della sua ascissa nel medesimo lato retto, spettante a tal diametro.

II. Notisi, che tutti i triangoli posti sull' ordinate,

nale, adiacenti al suo diametro, e con il lato sottesō paralello alla tangente, come sarebbe *PLH*, *PBF*, *NTZ*, sono uguali ai paralellogrammi corrispondenti *NLRI*, *NBSI*, *NTVI* &c. Siccome anco *IXN* è uguale a *MXNG*, *RDH* è uguale a *MDPG*, e *dfs* è uguale *MdpG*; e così di tutti gli altri.

III. Similmente s' avverta, che il triangolo *NEG* si è dimostrato uguale al triangolo *IEM*: e perchè il triangolo *DHR* è uguale a *MDPG*, tolto di comune *MDHO*, sarà il triangolo *ORM* uguale ad *OHPG*; onde lo stesso triangolo *ORM* con il simile *PLH* è uguale al triangolo *GLO*: parimente, perchè il triangolo *bpL* è uguale a *PLH* per essere *bL* uguale a *LH*, sarà *ORM* con *pLb* uguale a *GLO*; onde i quadrati *OR*, *HL*, o pure *OR*, *bL* sono uguali al quadrato *OL*: o pure, prendendo altri lati omologhi, i quadrati *MR*, o *KL*, ed *LP*, ovvero *Lp* sono uguali al quadrato *LG*.

IV. Parimente, perchè il triangolo *XVZ* è uguale a *MXNG*, se prolunghisi la tangente *GM* in modo, che seghi l' ordinate *TZ* in *Y*, e *BF* in *A*, e pongasi *MXZY* di comune, risulterà il triangolo *MVY* uguale a *ZNGY*; siccome, perchè il triangolo *DFS* è uguale a *MDPG*, se pongasi di comune *MDFA*, sarà il triangolo *MSA* uguale a *FPGA*: E in simil guisa potrà dimostrarsi il triangolo *Msa* uguale ad *fpGa*.

V. In oltre essendo il triangolo *MVY* uguale al trapezio *ZNGY*, se all' uno, e all' altro aggiungasi il triangolo simile *NTZ*, saranno i due triangoli *MVY*, ed *NTZ* uguali al triangolo simile *GTY*; e perciò anco i quadrati *VY*, e *TZ* saranno uguali al quadrato *TY*: siccome

aggiungendo il triangolo *PFB* al triangolo *MSA*, e al suo trapezio uguale *EPGA*, saranno i due triangoli simili *PFB*, *MSA* uguali al triangolo simile *GBA*; onde i quadrati *BF*, *SA* uguagliano anch'essi il quadrato *BA*: e similmente prendendo gli altri lati omologhi, saranno i quadrati *MV* o *KT*, ed *NT* uguali al quadrato *GT*, e i quadrati *PB*, ed *MS*, o *KB* uguali al quadrato *GB*, e così degli altri.

VI. Di nuovo, perchè il triangolo *PLH* è uguale al paralellogrammo *NLRI*, tolto di comune *NLHÆ* ne risulta il triangolo *PNÆ* uguale ad *ÆHRI*, e aggiungendo all'uno, e l'altro il triangolo simile *HRD*, saranno i triangoli *PNÆ*, *HRD* uguali al triangolo simile *ÆDI*, onde i quadrati dei lati omologhi *NÆ*, ed *HR* uguaglieranno ancor essi il quadrato *ÆI*; e per la stessa ragione i quadrati *PÆ*, *HD* saranno uguali al quadrato *ÆD*; e perchè questo è uguale al rettangolo *FÆH* (a) insieme con il quadrato *HD*, sarà il quadrato *PÆ* uguale al rettangolo *FÆH*. Parimente per essere il triangolo *bpL* uguale ad *NLRI*, posto di comune *NLbç*, sarà il triangolo *pNç* uguale ad *IRbç*; onde se all'uno, e all'altro aggiungasi il triangolo *bRd*, saranno i due triangoli *pNç*, *bRd* uguali al triangolo simile *çId*; e perciò anco i quadrati de'lati omologhi *db*, *pç* saranno uguali al quadrato *çd* o pure al rettangolo *fçb* con il quadrato *db*; sicchè il quadrato *pç* sarà uguale al rettangolo *fçb*; e la retta *çp* sarà media proporzionale fra le due rette *fç*, ed *çb*, siccome la retta *PÆ* è media proporzionale anch'essa fra l'altre due *FÆ*, *ÆH*.

VII. Per la stessa ragione, poichè i quadrati *OR*, *LH* sono uguali (b) al quadrato *LO*, o pu-

(a) per la 6. del 2. d'Eucl.

(b) per il Coroll. 3.

pure al rettangolo *bOH* con il quadrato *LH*; sarà il quadrato *OR* uguale al rettangolo *bOH*, e perciò la retta *OR* è media proporzionale fra *bO*, ed *OH*: similmente prolungando l' ordinata *FB* all'altra parte della curva in Φ, per essere i quadrati *SA*, *FB* uguali al quadrato *BA* (a), cioè al rettangolo Φ*AF* con il quadrato *BF*, sarà il rettangolo Φ *AF* uguale al quadrato *SA*, onde la retta *SA* è media proporzionale fra le due Φ *A* ed *AF*.

(a) per il Coroll. 5.

VIII. Laonde se due tangenti *NE*, *ME* convengano in *E*, ed Φ *A* paralella ad una di esse *NE* seghi l'altra tangente in *A*, sarà il rettangolo di tutta la segante Φ *A* nella parte esterna *AF* al quadrato della porzione *AM* della tangente intercetta fra il contatto, e la segante, come il quadrato della tangente paralle̲la *NE* al quadrato di *EM*; che è l'altra tangente: imperocchè il quadrato *NE* al quadrato *EM*, uguale al quadrato *EG*, sta come il quadrato *SA*, o pure come il rettangolo Φ *AF* ad esso uguale, al quadrato *AM*. Nella stessa maniera il rettangolo *FÆH* fatto dalla segante *ÆHF* paralella alla tangente *M E* sta al quadrato *EN*, come il quadrato *PÆ* (b) uguale ad esso rettangolo, al quadrato *ÆN*, cioè come il quadrato *GE*, o pure *EM* ad esso uguale, al quadrato *EN*.

(b) per il Coroll. 6.

PROPOSIZIONE XI.

Nella Parabola AND *dove la base è* AD, *il diametro* NB, *ed il lato retto* NF, *tutte le rette* MB, HG *paralelle al diametro, sono come i rettangoli* AED, AGD, *fatti da' segmenti della base, e se prolungata la base fuori della Parabo-*

la si tirino le paralelle al diametro e m, g h *saranno ancor queste come i rettangoli*, AeD, AgD.

PErciocchè siccome il quadrato *BD* è uguale al rettangolo *BNF*, così il quadrato dell' altra ordinata *HP*, ovvero *hp* è uguale al rettangolo del parametro *NF* nell' ascissa *NP*, o pure *Np*; dunque la differenza de' quadrati *BD*, *PH*, ovvero *BG*, che gli è uguale, cioè il rettangolo *AgD* è uguale al rettangolo della medesima *NF* nella differenza dell' ascisse *NB*, *NP*, cioè nella *PB* uguale ad *HG*: similmente la differenza de' quadrati *BD*, *pb*, ovvero *Bg*, che gli è uguale, cioè il rettangolo *AgD* è uguale al rettangolo di *NF* in *Bp*, o pure *gh*, che è la differenza di *BN* da *Np*: parimente dimostreremo, che il rettangolo *AED* è uguale al rettangolo di *NF* in *ME*, e che il rettangolo *AeD* è uguale al retangolo di *NF* in *me*; dunque queste linee paralelle al diametro *ME*, *HG*, sono come i rettangoli *AED*, *AGD*, per essere uguali ad essi moltiplicate nello stesso parametro *NF*; e per la stessa ragione le paralelle *em*, *gh* sono come i rettangogli corrispondenti *AeD*, *AgD*. Il che bisognava &c.

COROLLARIO.

Prolungando *HP*, che taglia *ME* in *I* all' altra parte del diametro in *L*, sarà il rettangolo *AED* al rettangolo *LIH* come *ME* ad *MI*; imperocchè nella stessa maniera il rettangolo di *NF* in *ME* è uguale al rettangolo *AED*, e il rettangolo di *NF* in *MI* è uguale a *LIH*. E similmente prolungando in *l*, *hp*, che tagli *em* in *i*, il rettangolo *AeD*, che è uguale al ret-

tan-

tangolo di *NF* in *em*, sarà il rettangolo *lib*, che è uguale parimente al rettangolo di *NF* in *mi*, come *em* ad *mi*.

PROPOSIZIONE XII

Nell' Ellisse, e nell' Iperbole opposte qualunque retta MC *condotta pel centro* C, *concorre con l' altra parte della Sezione in* S, *e vien divisa per mezzo nel centro; in oltre le tangenti* MG, SP *tirate da' di lei termini* MS *sono paralelle, ed uguali fra loro.*

TAV. IV. FIG. 34. 35.

POsta *MK* ordinata al primo diametro *NQ*, e *CF* uguale a *CK*, facciasi *FS* ordinata all' altra parte dello stesso diametro, e giunta la *SC*; perchè la differenza de' quadrati *NC*, *CK*; cioè il rettangolo *NKQ* è uguale alla differenza degli altri due quadrati respettivamente uguali *GQ*, *CF*, cioè al rettangolo *NFQ* (a), e i quadrati dell' ordinate *MK*, *SF* sono proporzionali a' detti rettangoli (b), saranno questi quadrati uguali fra loro: pertanto essendo *MK* uguale ad *FS*, e *CK* uguale a *CF*, e di più essendo uguali gli angoli alterni delle paralelle *MKC*, *SFC*, sarà la base *CM* del triangolo *CKM* uguale alla base *CS* del triangolo *CFS*, e l' angolo *MCK* sarà uguale all' angolo *SCF*; onde siccome quello con l' angolo *MCF* compisce due retti, così con lo stesso gli compisce ancor questo, perciò *CS* è in diretto a *MC*, mercè degli angoli *SCF*, *MCF* uguali a due retti. Dunque la retta *MC* prolungata concorre con l' altra parte della Sezione in *S*, e la retta *MCS* è divisa pel mezzo nel centro *C*. E perchè tirate le tangenti *MG*,

(a) per la 5. e 6. dell' 11. Eucl.
(b) per la prop. 5. 6.

SP il rettangolo GCK (a) è uguale al quadrato del semidiametro CN, ed il retangolo similmente PCF, è uguale al quadrato CQ; siccome CN è uguale a CQ, così il rettangolo GCK, è uguale a PCF; ma CK è uguale a CF; dunque ancora è CG uguale a CP; per la qual cosa essendo CM uguale a CS, e gli angoli MCG, SGP uguali, anco le basi MG, SP di questi triangoli saranno fra loro uguali, e paralelle per essere uguali gli angoli alterni MGC, SPC. Il che &c.

(a) Per il Coroll. II. Prop. 9.

COROLLARJ.

I Prolungando la retta SF all'altra parte della Sezione in E, sarà FE uguale ad FS, e perciò ancora a KM, che gli è paralella, onde se giungasi ME sarà paralella, ed uguale a KF.

II. Se tirisi pel centro C la retta CH paralella all'ordinate MK, EF, dividerà pel mezzo in B la retta EM con tutte l'altre, che sono paralelle a questa, e congiungono i termini dell'uguali ordinate al diametro NQ. Imperocchè sarà la BM uguale alla CK, e la BE uguale alla CF, essendo i lati opposti di paralellogrammi; ed essendosi di già posta la CF uguale alla CK. Onde CH è un diametro ancor essa, di cui possono essere ordinate le rette ME, TL, paralelle al primo diametro, che dalla medesima HC saranno divise pel mezzo ne' punti B, ed R.

Chiamasi quest' altro diametro *Secondario*, e *Conjugato* al primo. Questi nell' Ellisse vien determinato a' punti H, I del suo perimetro, essendo CI uguale a CH; ordinandosi ancor essa al diametro NQ, e perciò da esso diviso pel mezzo in C. Quest' istesso diametro vien determina-

minato nell'Elisse dal suo perimetro ne' punti *H*, *I*, e perocchè è un'ordinata anch'egli del diametro *NQ*, perciò è tagliato da esse in *C* pel mezzo, sicchè *CI* è uguale a *CH*. E perchè il quadrato (a) dell'ordinata *HC* sta al rettangolo de' segmenti del diametro *QCN*, cioè al quadrato *CN*, come *NV* lato retto al trasverso *QN*, anche quadruplicando i termini, sarà il quadrato *HI* al quadrato *NQ* come *NV* a *NQ*; onde il secondario diametro conjugato *HI* è media proporzionale fra il parametro *NV*, e il primario trasverso diametro *QN*. Nell'Iperbole poi bisogna determinare la media proporzionale *HI* frà il lato retto *NV*, e il trasverso *NQ*, e adattarla in modo nel centro *C*, che sia paralella all'ordinate del diametro *NQ*, e sia divisa pel mezzo nel medesimo punto *C*, e questo sarà il diametro secondario conjugato al primo *NQ*.

(a) per il Coroll. 6. Prop. 6.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 34. 35.

Nell'Elisse i quadrati BM, RT *dell'ordinate al secondario diametro* IH, *sono anch'essi come i rettangoli* HBI, HRI *delle parti dello stesso diametro, cioè come la differenza del quadrato* HC *dal quadrato* BC *alla differenza del medesimo quadrato* HC *dal quadrato* RC. *Ma nell'Iperbole i quadrati dell'ordinate* BM, RT *al diametro secondario* IH *sono come la somma del quadrato* HC, *e* BC *alla somma del medesimo quadrato* HC, *ed* RC.

La prima parte è manifesta, perchè ordinando le rette *MK*, *TZ* al primo diametro *NQ*, per essere il rettangolo *NCQ*, ovvero il quadrato *CN* al rettangolo *QKN* come il qua-

drato

drato CH al quadrato KM, o CB, sarà permutando tutto il quadrato CN a tutto il quadrato CH come il rettangolo QKN tolto dal primo al quadrato CB tolto dal secondo; onde il rimanente quadrato CK, o BM sta al rimanente rettangolo HBI (a), come tutto il quadrato CN a tutto il quadrato CH. Nell'istessa maniera dimostrerassi, che il quadrato RT sta al rettangolo HRI come il quadrato CN al quadrato CH; dunque i quadrati BM, ed RT sono come i rettangoli delle parti del secondario diametro HBI, HRI; che sono le differenze de' quadrati BC, RC dal medesimo quadrato CH. La seconda si dimostra in tal guisa: nell' Iperbole il rettangolo QKN sta al quadrato MK, o BC, come il lato trasverso QN al retto NV, o pure come il quadrato NQ quadrato HI, che è media proporzionale fra NQ, ed NV; ovvero presi i subquadrupli, come il quadrato CN al quadrato CH; dunque anco la somma degli antecedenti, cioè QKN con il quadrato CN, che vale a dire il quadrato CK o BM, sarà alla somma dei conseguenti, cioè al quadrato BC con il quadrato CH, come un antecedente al suo conseguente (b), cioè come il quadrato CN al quadrato CH: ma proveremo similmente, che il quadrato RT sta alla somma de' quadrati RC, CH nella stessa ragione del quadrato CN al quadrato CH; dunque i quadrati BM, RT sono come la somma de' quadrati BC, CH alla somma de' quadrati RC, CH. Il che bisognava &c.

(a) per la 19. del 5. di Eucl.

(b) per la 12. del 5. di Eucl.

COROLLARI.

I. E' chiaro, che nell' Ellisse il quadrato di qualunque ordinata BM al rettangolo HBI fatto

to dalle parti del secondario diametro, sta come il trasverso *QN* al retto *NV*, essendo come il quadrato *CN* al quadrato *CH*, o come il quadrato *NQ* al quadrato *HI*, che sono nella medesima ragione.

II. Onde se pongasi *HX* quarta proporzionale a *NV*, *HI*, *QN*, sarà *HX* il parametro del diametro conjugato *IH*: imperocchè permutando *HX* ad *HI* sarà come *QN* a *NV*; onde il quadrato dell'ordinata *BM* al rettangolo *HBI*, e il quadrato dell'altra ordinata *TR* al rettangolo *HRI*, sta come questo parametro, o lato retto *HX* al trasverso *HI*.

III. Ma nell'Iperbole essendo il quadrato *MB* alla somma de' quadrati *BC*, *HC*, come il quadrato *NC* al quadrato *HC*, o pure come *QN* a *NV*, ovvero (presa *HX* quarta proporzionale ad *NV*, *HI*, *QN*) come *HX* ad *HI*; sara *HX* il lato retto, o parametro di quel diametro secondario *HI*, che apparterrebbe a due altre Parabole descritte dal diametro trasverso *HI*, come sarebbe *I i* ed *H Ab*: le quali due Iperbole si chiamano *Conjugate* alle due prime *NM*, *QS*.

IV. E perchè la retta *AR* ordinata dentro una di queste Iperbole conjugate al diametro *HI*, ha il suo quadrato *AR* al rettangolo *IRH*, come il lato retto *HX* al trasverso *HI*; sarà il quadrato *TR*, o *LR* alla somma de i quadrati *RC*, *CH*, come il quadrato *AR* al rettangolo *IRH*, per esser l'una, e l'altra di queste ragioni uguale a quella di *HX* ad *HI*.

V. E permutando sarà il quadrato *LR* al quadrato *AR*, come la somma de i quadrati *RC*, *CH* al rettangolo *IRH* loro differenza; e dividendo il quadrato *LR*, toltone il quadrato *AR* che vale a dire il rettangolo *TAL*, sarà al quadrato

drato *AR* come la somma de'quadrati *HG*, *CR*, toltone il rettangolo *IRH*, cioè come il quadrato *HC* con il quadrato medesimo *HC*, che vale a dire come il doppio quadrato *HC* allo stesso rettangolo *IRH*: e permutando di nuovo sarà il rettangolo *TAL* al doppio quadrato *HC*, come il quadrato *AR* al rettangolo *IRH*, cioè come *HX* ad *HI*, cioè come il quadrato *CN* al quadrato *CH*, o pure come il doppio quadrato *CN* al doppio quadrato *CH*; sicchè il rettangolo *TAL* è sempre uguale al doppio quadrato *CN*, e perciò è d'una quantità sempre costante.

VI. Quindi tirando al diametro *HI* dal suo termine *H* un' ordinata *HY*, che tagli una delle prime Iperbole, come *EQS* in *Y*, sarà il quadrato della medesima *HY* doppio del quadrato *CN*. Perchè sarebbe il quadrato dell'ordinata *HY* alla somma de'quadrati *HC*, *CH*, cioè al doppio del quadrato *CH*, come il quadrato *MB*, alla somma de' quadrati *BC*, *CH*, cioè come il quadrato *NC* al quadrato *CH* (a), oppure come il doppio del quadrato *CN* al doppio del quadrato *HC*, onde il quadrato *HY*, sarà doppio del quadrato *CN*.

(a) *per il Coroll. 3. di questa.*

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 36. 37.

Nell' Ellisse, e nelle Iperbole opposte qualunque altra retta MC *condotta pel centro* C *è un diametro, che divide per mezzo tutte le rette* NZ, HF, *ad esso applicate, e parallele alla tangente* GM.

Tirisi per il vertice *N* del primo diametro dato *NQ* la tangente *NI*, che taglierà la

CM

CM in *I*, la tangente *MG* in *E*, e l' applicate *HF*, *bf* ne'punti *Æ*, ed *e*, una delle quali è tirata sopra *NZ* dal vertice *N*, l'altra sotto di essa. Si tirino inoltre l'ordinate al primo diametro *MK*, *ZT*, *HL*, *FB*, *Lb*, *fb*, che concorrano con la retta *CM* ne'punti *V*, *R*, *S*, *ſ*, e con la tangente *MG* ne'punti *T*, *O*, *A*, *a*. Poichè *CK* sta a *CN* (a) come *CN* a *CG*, sarà il quadrato *CK* al quadrato *CN*, o pure il triangolo *CKM* al simile *CNI*, com *CK* a *CG*, che stanno fra loro come il triangolo *GKM* al triangolo *CGM* della stessa altezza; onde i triangoli *CNI*, *CGM* sono uguali; sicchè togliendo dall' uno, e l'altro di questi, il triangolo *CKM*, resterà il trapezio *NKMI* uguale al triangolo *GKM*: ma questo triangolo a' triangoli simili *NTZ*, *PLH*, *PBF*, *pLb*, *pbf* sta come il quadrato *KM* a'quadrati de i lati omologhi *TZ*, *LH*, *BF*, *Lb*, *bf*, cioè per natura dell'Ellisse (b), e dell'Iperbole, come il rettangolo *QKN* a' rettangoli a quelli corrispondenti *QTN*, *QLN*, *QBN*, *QLN*; *QbN*, cioè come la differenza del quadrato *CN* dal quadrato *CK*, alla differenza dello stesso quadrato *CN* da'quadrati *CT*, *CL*, *CB*, *CL*, *Cb*, o pure per l'analogia de' triangoli simili con i quadrati de' lati omologhi, come la differenza del triangolo *CNI* dal triangolo *CKM* alle differenze dello stesso triangolo *CNI* da' triangoli, *CTV*, *CLR*, *CBS*, *CLR*, *Cbſ*, che vale a dire, come il trapezio *NKMI* a' trapezi *NTVI*, *NLRI*, *NBSI*, *NLRI*, *Nbſl*; dunque siccome il triangolo *GKM* è uguale ad *NKMI*: così *NTZ* sarà uguale a *NTVI*, *PLH* ad *NLRI*, *PBF* ad *NBSI*, e finalmente i rimanenti triangoli uguaglieranno i trapezi rimanenti. Pertanto se tolgasi *NTVX* da *NTZ*, e dell' uguale spa-

(a) per il Coroll. II. Prop. 9.

(b) per la Prop. 5. 6.

spazio *NTVI*, resterà *XVZ* uguale al triangolo simile *XIN*, i lati omologhi de' quali *XZ*, *XN* saranno uguali. Similmente essendo la differenza de' triangoli *PBF*, *PLH*, cioè il trapezio *LBFH* uguale alla differenza de i trapezi a quegli uguali *NBSI*, *NLRI*, cioè al trapezio *LBSR*; se da questi due trapezi *LBFH*, *LBSR* tolgasi lo spazio comune *LBSDH*, rimarranno uguali i triangoli simili *SDF*, *RDH*, onde anco i loro lati omologhi *DF*, *DH* saranno uguali. Parimente se al triangolo *pbL*, e al trapezio uguale *NLRI* aggiungasi *LbsR*, ne risulterà lo spazio *bpbsR* uguale a *NbsI*, cioè al triangolo *pbf* uguale a questo trapezio; e tolto di comuno lo spazio *pbsd*, resterà il triangolo *bRd* uguale al suo simile *fsd*, onde anco i loro lati omologhi *bd*, *df* saranno uguali. Dunque la retta *CM* è un diametro, che divide per mezzo tutte le rette *NZ*, *HF*, *bf* ad esse applicate, e parallele alla tangente *GM*. Il che &c.

FIG. 38. Ma nell' Ellisse può accadere, che l' ordinata *fb* al primo diametro *NQ* cada di là dal centro *C* verso *Q*; che però tirata allora un' altra tangente verticale *Qi*, che concorra con *MC* in *i*, sarà eziandio il triangolo *pbf* uguale al trapezio *Qbsi* (per esser questo al trapezio *NKMI*, come il rettangolo *QbN* a *QKN*, o pure come il quadrato *fb* al quadrato *MK*, o pure come il triangolo *pbf* al simile *GKM*, che abbiam visto uguale a *NKMI*.) E posto di comune *sbC*, sarà lo spazio *pCsf* uguale al triangolo *QCi* ovvero *CNI*, che è lo stesso; onde tolto di comune *Cdp* sarà il triangolo *dsf* uguale a *NpdI*, che uguaglia il triangolo *dRb*, per essere *pLb* uguale a *NLRI*, e lo spazio *LpdR*, comune all' uno, e l' altro; sicchè essendo uguali,

si, e simili i triangoli *dsf*, *dRb* anche i loro lati omologhi *fd*, *db* saranno uguali. Il che &c.

COROLLARI.

I. Comecchè il triangolo *CGM* si è dimostrato uguale à *CNI*, però tolto di comune il quadrilineo *CGEI* nell'Iperbole, e *CMEN* nell'Ellisse rimane il triangolo *IEM* uguale a *GEN*, e posto di comune *NEMX* ne risulta il triangolo *IXN* uguale al trapezio *MXKG*. FIG. 36. 37. 38.

II. Parimente se agli stessi triangoli *IEM*, *GEN* aggiungasi lo spazio *NEMSB* ne risulterà *GMSB* uguale a *NBSI* cioè al triangolo *PBF*, che dimostrossi a questo uguale, onde tolto di comune *PDSB*, il triangolo *DSF*, o pure *DHR*, che l'uguaglia, sarà uguale al trapezio *MDPG*. Similmente posto di comune *NbsME* agli stessi triangoli *IEM*, *GEN*, sarà *NbsI* già dimostrato uguale al triangolo *pbf*, uguale a *GbsM*, e tolto di comune *pbsd* rimarrà il triangolo *dsf* uguale al trapezio *MdpG*.

III. Quindi è manifesto, che i quadrati dell'ordinate *XZ*; *DF*, *df* a qualunque altro diametro *MC*, sono come i rettangoli delle parti del diametro *mXM*, *mDM*, *mdM*: imperocchè quei quadrati sono fra loro, come i triangoli simili *XZV*, o *XNI*, *DFS*, *dfs*, i quali abbiam visto, che sono uguali a trapezi *MXNG*, *MDPG*, *MdpG*, e perciò sono come le differenze del triangolo *CMG* da' triangoli simili *CXN*, *CDP*, *Cdp*, ovvero come le differenze del quadrato *CM* da' quadrati de' lati omologhi *CX*, *CD*, *Cd*: laonde il quadrato *XZ* sta a' quadrati *DF*, *df* (o pure il quadrato *NX* a' quadrati *HD*, *bd*) come il rettangolo *mXM* a' rettangoli *mDM*, *mdM*.

IV.

IV. Inoltre ciò che si dimostrò circa le tangenti, e circa il lato retto del primario diametro *QN* può riferirsi a qualunque altro diametro condotto pel centro *C*, per essersi dimostrato, che l'ordinate di esso son dotate della stessa proprietà essenziale; che vale dire, siccome la tangente *M G* taglia il diametro *Q N* in modo, che siano in continua proporzione le rette *CK*, *CN*, *CG*, e il rettangolo *GCK* sia uguale al quadrato del semidiametro *C N*, ed armonica sia la proporzione di *Q K* a *KN*, come *QG* a *GN*; così la tangente *NI* dividerà il diametro *mCM* per modo, che siano continue proporzionali le rette *CX*, *CM*, *CI*, e che il rettangolo *XCI* sia uguale al quadrato del semidiametro *CM*, e finalmente sarà il diametro diviso in armonica proporzione, cioè sarà *mX* ad *XM*, come *mI* ad *IM*.

V. Il Parametro poi, o lato retto di questo diametro *CM* potrà determinarsi facendo come il rettangolo delle parti di esso *mDM* al quadrato dell'ordinata *DF*, così lo stesso diametro trasverso *m M* ad un' altra linea; imperocchè sarà questa il parametro, o lato retto (per il Corollario 6. della Proposizione 5.) che (dove i quadrati dell'ordinate son come i rettangoli delle parti del diametro) al lato trasverso sta come il quadrato dell'ordinata al corrispondente rettangolo delle parti del diametro.

[a] Prop. 10. Coroll. 3. 45. 6.

VI. E ciò che dimostrammo (a) nella Parabola circa l'uguaglianza de' triangoli, e de' i quadrilateri corrispondenti, appartiene altresì a queste Iperbole, ed Ellissi per la stessa ragione, che di nuovo addurremo: cioè per essere *ORM* uguale ad *OHPG* saranno i due triangoli *PHL*, *ORM* presi insieme uguali a tutto il triangolo

GLO;

GLO; ma non saranno però i quadrati *HL*, *OR* uguali al quadrato *LO* a cagion de' diametri *NK*, *MD*, che non sono quì paralelli come nella parabola; onde i triangoli *DHR*, *PLH* non sono simili. Il medesimo si dice del triangolo *MSA* uguale al trapezio *EPGA*, e de i triangoli *PBF*, *MSA* uguali a *GAB*, siccome degli altri rimanenti.

VII. Che poi il rettangolo della segante nella parte estrema interposta fra la tangente, e la curva, al quadrato della tangente, come sarebbe o *AF* al quadrato *AM*, stia come il quadrato della tangente *NE* paralella alla segante, al quadrato *EM* dell'altra tangente contigua (siccome anco *FÆH* al quadrato *ÆN*, o pure *f g h* ad *ç N* come il quadrato *ME* al quadrato *EN*) accade eziandio nell' Iperbole, e nell' Ellisse; e ciò sempre segue ancorchè da due Iperbole opposte si tirassero le tangenti, che concorressero insieme, il che mostrerassi diffusamente nella Proposizione 16.

PROPOSIZIONE XV.

Se nel perimetro dell' Iperbole, o dell' Ellisse prendasi qualunque punto H *fra i due diametri* CN, CM (*o pure anco fuora di essi nell' Ellisse*) *e da quel punto si tirino alle tangenti* NI, MG *le paralelle* HR, HP *prolungata fino a' medesimi diametri in* R, *e* P; *sarà il quadrilatero* PHRC *uguale al triangolo* CGM, o CNI.

FIG. 39. 40. 41.

IMperocchè per essere il triangolo *DHR*, uguale (a) al trapezio *DMGP*, se l' uno, e l' altro si tolga dal triangolo *CPD* nell' Iperbole, o questo s' aggiunga all' uno, e l' altro nel-

(a) per il Coroll. 2. della proposiz. 14.

l'Ellisse, risulterà il quadrilatero *PHRC* uguale al triangolo *CGM*. Il che bisognava &c.

COROLLARJ.

I. Quindi se prendasi un altro punto *A* nel perimetro dell'Iperbole, e dell'Ellisse, e si tirino da esso alle medesime tangenti le paralelle *AT*, *AL* prolungate fino agli stessi diametri in *T*, ed *L*, anco il quadrilatero *LATC* sarà uguale al triangolo medesimo *CGM*, onde i due quadrilateri *PHRC*, *LATC* saranno uguali fra loro.

II. E se *AT*, *PH* concorrono in *K*, le differenze de' detti quadrilateri uguali, dal quadrilatero *PKTC*, che vale a dire i trapezi *KHRT*, *PKAL*, saranno fra loro uguali.

III. Che se *AL* eziandio, ed *HR* convenghino in *Z*, aggiunto, o tolto *AKHZ* ai detti trapezi, ne risulterà *AZRT* uguale ad *HZLP*.

PROPOSIZIONE XVI.

TAV. V. FIG. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49.

In qualunque Sezione Conica, se due tangenti della medesima Sezione, ovvero dell'Iperbole opposte ME, NE *concorrino in* E, *e qualsisia retta* FÆ *paralella ad una delle tangenti* ME *tagli la curva in* H, F, *e l'altra tangente* NE *in* Æ, *sarà il rettangolo* FÆH *al quadrato* NE, *come il quadrato* ME *al quadrato* EN.

PEr i punti del contatto *M*, *N*, si tirino i diametri *MD*, *NK*, che taglino *HF* in *D*, ed in *P*, la tangente *NE* in *I*, *ME* in *G*, e la retta condotta per *H* paralella a *NE* in *R*, e *K*. Poichè il quadrato *ÆD* al triangolo *ÆDI*

ÆDI sta come il quadrato HD al triangolo simile HDR, sarà la differenza degli antecedenti, cioè il rettangolo FÆH (per essere HE divisa nel mezzo in D dal diametro MD cui è ordinata, come paralella alla tangente ME) al trapezio IÆHR differenza de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente, che vale a dire come il quadrato ME al triangolo EMI, che è l'istessa ragione del quadrato ÆD al triangolo ÆDI; ma IÆHR è uguale al triangolo ÆPN (perciocchè nella Parabola, e alcune altre figure PKH, è uguale a NKRI, onde tolto, o aggiunto NÆHK, restano uguali IÆHR, ed ÆPN; nell' Iperbole poi, e nell' Ellisse, mercè del quadrilineo CRHP uguale al (a) triangolo CNI tolto, o aggiunto CIÆP, ovvero CRHÆN, risulta ÆPN uguale parimente ad IÆHR) e il triangolo EMI è (b) uguale al ENG; dunque il rettangolo FÆH al triangolo ÆPN sta come il quadrato ME al triangolo ENG; e permutando il rettangolo FÆH al quadrato ME sta come il triangolo ÆPN al triangolo ENG, che vale a dire come il quadrato ÆN al quadrato EN; onde permutando di nuovo il rettangolo FÆH al quadrato ÆN sta come il quadrato ME al quadrato EN. Il che &c.

(a) per la prop. 15.

FIG. 49.

(b) per la prop. 10. e per il Coroll. 1. della 14.

COROLLARJ.

I. Se tirisi la retta MN, che congiunga i contatti, e seghi HF in V, saranno in continua proporzione FÆ, VÆ, HÆ; cioè il rettangolo FÆH sarà uguale al quadrato ÆV. Imperocchè questo quadrato al quadrato ÆN, sta come il quadrato EM al quadrato EN, cioè

come il detto rettangolo *FÆH* allo stesso quadrato *ÆN*.

FIG. 42. 43. II. Nella Parabola anco il quadrato *ÆP* è uguale al rettangolo *FÆH*. Imperocchè siccome *ME* è uguale ad *EG* per proprietà della tangente, così *VÆ* sarà uguale ad *ÆP*, onde il quadrato dell'una, o l'altra è uguale al rettangolo *PÆH*.

FIG. 50. III. Se più seganti, e paralelle fra loro *FH*, *fb* concorrino con una qualche tangente *NB* ne' punti *Æ*, ed *e*; saranno i rettangoli *FÆH*, *feb*, come i quadrati *NÆ*, *Ne* delle parti intercette della tangente; imperocchè quei rettangoli sono uguali a' quadrati *ÆV*, *eu*, che sono proporzionali a' quadrati *NÆ*, *Ne*.

Vedi le Fig. precedenti. IV. Poichè *HF* divisa nel mezzo in *D* dal suo diametro, ci da il rettangolo *FÆH* con il quadrato *HD* uguale al quadrato *DÆ*, se pongasi in vece del rettangolo il quadrato *ÆV*, che gli è uguale, saranno i due quaddrati *ÆV*, *HD* uguali al quadrato *ÆD*.

FIG. 42. 43. V. E nella Parabola per essere *VÆ* uguale ad *ÆP*, sarà il rettangolo *VHP* con il quadrato *ÆH* uguale al quadrato *ÆV*, cioè al rettangolo *FHÆ* con il quadrato *ÆH*, sicchè tolto di comune il quadrato *ÆH* resterà il rettangolo *VHP* uguale al rettangolo *FHÆ*, e perciò *FH* ad *HP* sarà come *HV* ad *HÆ*, o pure come la rimanente *VF* alla rimanente *PÆ*; ovvero sarà *FH* ad *HV*, come *PH* ad *HÆ*, cioè come *PK* a *KN*.

PROPOSIZIONE XVII.

TAV. VI. FIG. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. *Se le rette* HF, TK *paralelle a due tangenti* MA, NA *concorrenti in* A *taglino qualunque*

Se

Sezione Conica, o due Iperbole opposte ne' punti H, F, K, T, e concorrino esse in R o dentro, o fuori della Sezione, sarà il rettangolo HRF, al rettangolo KRT, come il quadrato della tangente MA al quadrato della tangente AN.

CONdotti per i contatti i diametri *ME*, *NL* a' quali saranno ordinate le rette *FH*, *TK* paralelle alle tangenti, onde saranno divise nel mezzo ne' punti *E*, ed *L*, si conduca *KO* paralella a *MA*, ed *HS* paralella ad *AN* dalle quali saranno tagliati i diametri in *O*, ed *S*, siccome sono tagliati dalle tangenti prolungate in *G*, e *D*, e dalle rette prolungate *FH TK* in *P*, e *Q*. E' manifesto, che il rettangolo *HRF* differenza de i quadrati *HE*, *RE* al trapezio *HSQR* differenza de' triangoli simili *HES*, *REQ* sta come il quadrato *HE* al triangolo *HES*, o pure come il quadrato *MA* al triangolo simile *AMD*, o *ANG*, che gli è uguale: il trapezio poi *HSQR* uguale all' altro *KOPR* (come dimostrammo ne' Corollarj della Proposiz. 15.) al rettangolo *KRT* sta come il triangolo *KLO* al quadrato *KL*, cioè come il triangolo *ANG* al quadrato *AN*; dunque per ugualità di ragione ordinata, sarà il rettangolo *HRF* a *KRT* come il quadrato *MA*, al quadrato *AN*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se due corde equidistanti *HF*, *ZX* siano segate da un' altra *KT* in R, ed *V*, sarà il rettangolo *HRF* a *ZVX*, come *KRT* a *KVT*; Imperocchè alternativamente *HRF* sta a *KRT* (a) come *ZVX* a *KVT*, cioè come il qua-

(a) per la Propos. 9.

drato della tangente *MA* paralella alle prime seganti, al quadrato d'*AN* paralella all'altra segante *KT*.

II. E se le rette *HF*, *KT* concorrenti in R siano paralelle a due altre XZ, *TH*, che concorrino in *I*, tanto *HRF* a *KRT*, quanto XIZ ad *TIH* saranno nella stessa ragione del quadrato della tangente *MA* al quadrato della tangente *AN*, onde sarà permutando *HRF* ad XIZ, come *KRT* ad *TIH*.

FIG. 51. 52.

III. Nella Parabola gli stessi rettangoli *HRF*; *KRT* sono come i parametri o lati retti de'diametri *ME*, *NL*, che hanno per ordinate quelle rette: perciocchè se dal punto del concorso R si tiri RB paralella a' diametri, sarà il rettangolo *HRF* uguale al rettangolo del parametro (a) appartenente al diametro *ME*, in *RB* e parimente il rettangolo *KRT* sarà uguale al rettangolo del parametro appartenente all' altro diametro *NL* nella stessa *RB*: onde è cosa chiara, ché questi rettangoli sono come i detti parametri.

(a) *Per la Prop.* II.

IV. Dal chè si raccoglie, che i parametri di diametri diversi della Parabola sono come i quadrati delle tangenti condotte da vertici di tali diametri, e concorrenti insieme; che vale a dire come sta il quadrato *MA* al quadrato *AN*, così il lato retto del diametro *ME* al lato retto dell'altro diametro *NL*.

V. Ma nell'Ellisse, e nell'Iperbole i quadrati delle tangenti sono in ragione composta de' diametri tirati da' contatti, e da' parametri ad essi corrispondenti; onde sono come i quadrati de' semidiametri conjugati, paralelli alle medesime tangenti; che però in questa istessa ragione sono eziandio i rettangoli delle parti delle se-

gan-

gati queste Sezioni, paralelle alle tangenti già dette. Ciò apparisce manifestamente nell' Ellisse, perciocchè tirandosi pel centro le paralelle alle tangenti, saranno i rettangoli di quelle i quadrati de' detti semidiametri (che per esser paralelli all' ordinate de' diametri trasversi, sono conjugati agli stessi diametri) proporzionali a i quadrati delle tangenti paralelle. Nell' Iperbola poi, siccome ancor nell' Ellisse, vedremo ciò dimostrato nel Corollario 2. e 3. della Proposizione seguente.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se nell' Ellisse, o nell' Iperbola a' termini di qualunque diametro QN *si tirino le tangenti* QR, NE, *che per esser paralelle all' ordinate, saranno paralelle fra loro, e un' altra tangente* MG *le tagli ne' punti* R, *ed* E, *sarà il rettangolo di* QR *in* NE *uguale al quadrato del semidiametro secondario* CB, *conjugato al primo* QN.

FIG. 58. 59.

IMperocchè posta *MK* ordinata al diametro, per proprietà della tangente *MG*, sarà *QG* a *GN* (a) come *QK* a *KN*: onde la somma di *QG*, *GN* nell' Ellisse, o la differenza nell' Iperbola, sarà a *GN* come la somma di *QK*, *KN* nell' Ellisse, ovvero come la differenza nell' Iperbola a *KN*, e presa la metà degli antecedenti, sarà *CG* a *GN*, come *CQ* a *KN*; sicchè la somma degli antecedenti *QG* alla somma de' conseguenti *KG*, sarà come il primo antecedente *CG* al primo conseguente *GN*: ma mediante i triangoli simili *QG* a *KG* sta come *QR* a *KM*, e *CG* a *GN* sta come *CL* a *NE*; dunque *QR* a *KM* sta come *CL* a *NE*; on-

(a) Corell. 12. della Propos. 9.

de il rettangolo di QR in NE è uguale al rettangolo di KM in CL; e però tirando MH paralella a CN, che taglierà dal semidiametro CB, CH uguale a KM, il rettangolo di QR in NE sarà uguale a LCH: ma il rettangolo LCH è uguale al quadrato del semidiametro CB (imperciocchè il quadrato del primario semidiametro CN al quadrato del semidiametro conjugato CB, sta come QN trasverso (a) al suo parametro, cioè come il rettangolo CKG uguale a QKN al (b) quadrato KM, e il rettangolo CKG al quadrato KM è in ragion composta di CK a KM, o CH, e di GK a KM, cioè di CG a CL, e perciò sta come il rettangolo di CK in CG al rettangolo di CL in CH; ma il quadrato CN è uguale (c) al rettangolo KCG; dunque anco il quadrato CB è uguale al rettangolo LCH) onde il rettangolo di QR in NE, che dimostrammo uguale a LCH, è uguale ancor esso al quadrato del semidiametro conjugato CB. Il che &c.

(a) per quel che si disse nel fine della Propos. 12.

(b) per il Coroll. 8. della Prop. 9.

(c) per il Coroll. 11. della Propos. 9.

COROLLARJ.

I. Se pel contatto M si conduca un altro diametro MSC, e si tiri la tangente SA, che sarà paralella a MG, e concorra nel punto A con la tangente NE, che concorra con il diametro MS in I, e dal centro si tiri CD paralella a ME, che sia il semidiametro secondario conjugato al semidiametro CM, sarà parimente il rettangolo di SA in ME uguale al quadrato del semidiametro CD per la stessa ragione.

II. E tirata la retta QS, NM, GI, che saranno paralelle fra loro (mercè de' triangoli

ugua-

uguali NEG, MEI, e perciò anche NGM, NMI, e delle rette uguali NC, CQ, ed MC, CS, sarà QG a GN come SI ad IM; e perciò anco QR a NE come SA a ME; sicchè il rettangolo di QR in NE al rettangolo di SA in ME, sarà in duplicata ragione di NE a ME: che vale a dire il rettangolo di QR in NE al rettangolo di SA in ME, cioè il quadrato CB al quadrato CD, sarà come il quadrato NE al quadrato ME.

III. E perciò se due corde paralelle alle tangenti NE, ME concorrino insieme, saranno i loro rettangoli come i quadrati de' semidiametri CB, CD ad esse paralelli, per essere come i quadrati delle dette tangenti.

PROPOSIZIONE XIX.

Nell' asse della Parabola NK *ponendo* NF *di sotto al vertice uguale alla quarta parte del suo parametro, e di sopra al vertice* NP *uguale alla detta* NF; *se facciasi* PV *paralella all' ordinate, e tirando dal punto* F *a qualunque punto della curva* M *la retta* FM, *si tiri la tangente* OMG, *e il diametro* MX *paralello all' asse* MK, *sarà l' angolo* XMO *uguale a* FMG, *e sarà* MF *uguale parimente alla quarta parte del parametro attenente al diametro* MX. FIG. 6.

Chiamasi il punto *F*, *Foco* della Parabola, e il punto *P* la sua *altezza*; siccome la retta *PV linea dell' altezza*.

Posta MK ordinata all' asse, sarà il quadrato MK uguale al rettangolo di KN nel quadruplo di NF, che è il parametro dell' asse; dun-

dunque il quadruplo del rettangolo KNF insieme con il quadrato FK, sarà uguale a' quadrati MK, FK, cioè al quadrato FM: ma per essersi posto NP uguale a NF, anco il quadrato PK è uguale (a) al quadruplo del rettangolo KNF con il quadrato FK; dunque il quadrato FM è uguale al quadrato PK, onde FM, è uguale a PK, ovvero FG; imperocchè per essere NK uguale a NG, ed NF uguale a NP, sarà FK uguale a PG, e per conseguenza PK uguale a FG. Sicchè il triangolo GFM sarà equicrure, e l'angolo FMG sarà uguale all'angolo MGK, ovvero all' esterno delle paralelle XMO. E questo dovea dimostrarsi in primo luogo. Secondariamento prolungando il diametro MX fino alla retta dell' *altezza* PV in V, sarà MV uguale a PK, e perciò altresì a MF, e ordinando NX paralella alla tangente MG, e dal vertice dell'asse condotta la tangente MD, che taglierà per mezzo MG in D, se giungasi DF, sarà il quadrato DG uguale al rettangolo FGN; imperocchè per essere MD uguale a DG, siccome KN è uguale a NG, e per essere MF uguale a GF, e l'angolo FMD uguale a FGD, anco gli angoli rimanenti di questi triangoli saranno uguali fra loro, onde l'angolo GDF è retto, come quello, che è uguale al suo conseguente MDF; sicchè il quadrato DG sarà (b) uguale a FGN, o pure al rettangolo di MF in MX, per essere FG uguale a MF, e GN uguale a MX; ma il quadrato DG è la quarta parte del quadrato MG, ovvero XN, per essere amendue queste rette doppie di DG; dunque il quadrato dell' ordinata XN è quadruplo del rettangolo di FM in MX; ma il detto quadrato è uguale al rettangolo del suo parametro nell' ascissa

(a) *Per la Prop. 8. del 2. d'Eucl.*

(b) *Per la prop. 8. del 6. d'Eucl.*

ascissa MX, pertanto FM è la quarta parte del detto parametro. Il che &c.

COROLLARJ.

I. C'insegna la Catottrica, che i raggi riflettono in guisa, che l'angolo d'incidenza XMO è uguale all'angolo di riflessione FMG, onde è manifesto, che tutti i raggi, che sono paralelli all'asse, e che scendono da un corpo luminoso, e posto a grandissima distanza, come sarebbe il Sole (i quali raggi prender si possono per paralelli, con più ragione che le direzioni de' gravi verso il centro della terra, come quelle che risguardano un luogo assai più prossimo del Sole) nell' incontrarsi con lo specchio Parabolico MNm, come per esempio XM, xm, xm. &c. debbono riflettersi nel punto F, ed ivi con il loro concorso accendervi il fuoco, per la qual proprietà il punto F, chiamasi Fuoco. FIG. 60. 61.

II. All'incontro, se pongasi un lume al fuoco F dello specchio Parabolico, i raggi, che quindi partono FM, Fm, Fm dovranno riflettersi, e stendersi per le rette Mx, mx, mx paralelle all'asse; onde per lunghissimo tratto conserveranno la stessa intensione, che hanno vicino al lume, come sarebbe in MX; sicchè anco i caratteri molto discosti dal lume potranno leggersi, e le superficie de i luoghi, benchè distanti, resteranno a bastanza illuminate.

III. La retta FD tirata dal fuoco al concorso della tangente verticale dell'asse, con la tangente laterale, è perpendicolare a questa istessa tangente; perciocchè abbiamo dimostrato, che l'angolo FDG è retto. FIG. 60.

IV. Anco MV porzione del diametro MX inter-

ter-

tercetta fra il vertice M, e la linea dell'altezza PV, è la quarta parte del lato retto corrispondente ad esso diametro: imperocchè FM è uguale a FG, ovvero a PK, onde è uguale a MV: e ovunque si tiri Fm, sarà questa sempre uguale a mu paralella all'asse, e distesa fino alla detta linea dell'*altezza*: onde in ogni luogo FM a MV sta come FN a NP.

FIG. 61. V. Qualsivoglia somma delle rette XM, MF è sempre uguale alla somma dell'altre xm, mF: perciocchè queste somme sono uguali a XV, ovvero TP, per essere MV uguale a MF.

FIG. 62. VI. Presi nel perimetro della Parabola di quà e di là dall'asse due punti M, B, (o pure della medesima parte Mb) e giunte con il fuoco F le rette MF, BF, ovvero bF, se tirinsi le tangenti MG, BH, che concorreranno in L (o pure MG, bh, che parimente concorreranno in l, sarà l'angolo MFB doppio dell'angolo GLB compreso dalle tangenti, o pure MFb doppio di Glb. Perciocchè essendosi mostrato equicrure il triangolo MFG, ovvero BFH, o pure bFh, sarà l'angolo esterno KFB doppio dell'interno FHB, e KFb doppio di Fhb, siccome MFK sarà doppio di MGF; onde KFB, insieme con MFK, cioè MFB sarà uguale al doppio di FHB con il doppio di MGF, cioè di HGL, a'quali è uguale il doppio di GLB: (ma KFb meno MFK, cioè MFB è uguale al doppio di Fhb meno il doppio di MGF, o pure hGl, a'quali è uguale il doppio di Glb) laonde l'angolo contenuto da i rami tirati dal fuoco, MFB, o pure MFb, è doppio dell'angolo compreso dalle tangenti GLB, o pure Glb.

FIG. 63. VII. Che se i punti M, B, siano nella medesi-

desima retta linea col fuoco F, le tangenti ML, BL si uniranno nell'angolo retto MLB; mentre essendo gli angoli BFK, e KFM uguali a due retti, la metà di essi, cioè l'angolo MLB compreso dalle tangenti, sarà uguale a un retto.

VIII. Quindi la medesima retta MB sarà il paramento del diametro LSR, che taglia per mezzo la MB come ordinata. Imperocchè circoscritto un cerchio intorno al triangolo MBL, avrà questo il suo centro in R, per essere l'angolo retto L nel semicerchio; per la qual cosa MB sarà doppia del raggio RL, ed essendo RL doppia di RS, o pure (tirata la tangente SH paralella a MB) di FH, che uguaglia FS, siccome fu dimostrata FM uguale ad FG, adunque MB è quadrupla di FS; ma questa è la quarta parte del parametro appartenente al diametro SR; dunque l'istessa MB è il parametro del detto diametro.

IX. Se giungasi la retta LF, sarà questa perpendicolare alla retta MB; perciocchè per essersi dimostrate uguali LS, SR, FS, sarà retto l'angolo LFR, come quello, che ritrovasi nel semicerchio descritto sull'interno diametro LR; onde il quadrato LF è uguale al rettangolo MFB.

X. L'istesso angolo retto MLB, compreso dalle tangenti, giace nella retta PV di *altezza* della stessa Parabola, per essere FS uguale a SL, siccome FN è uguale a NP; onde il punto L appartiene alla retta PV, in cui tal proprietà riconoscesi.

PROPOSIZIONE XX.

Nell'asse trasverso dell'Ellisse, e dell'Iperbole opposte, fatti i rettangoli QFN, NVQ *uguali al*

TAV. VII. FIG. 64. 65.

al quadrato del semiasse secondario conjugato CB, *ovvero alla quarta parte del rettangolo compreso dal trasverso* QN, *e dal lato retto* NS, *se da i punti* F, V *a qualunque punto della curva* M, *si giunghino le rette* FM, VM *conterranno queste con la tangente* GME *angoli uguali. Si chiamano questi due punti* FV, Fuochi *delle dette Sezioni.*

Concorrino le tangenti verticali dell'asse *QE*, *NO* con un'altra tangente *MG* n' punti *E*, ed *O*; dunque sarà il rettangolo di *QE* in *NO*, che uguaglia il quadrato di *CB* (a), uguale al rettangolo di *QFN*, ovvero di *NVQ*; e perciò sarà *EQ* a *QF* come *FN* a *NO*; ed *EQ* a *QV*, come *VN* a *NO*: onde giunte le rette *EV*, *OV*, ed *EF*, *FO*, saranno i triangoli *EQV*, *OVN* simili, siccome *EQF*, *ONF*; sicchè l'angolo *EVQ* sarà uguale a *NOV*: e perchè *NOV* insieme con *NVO* compisce un retto (per essere retto l'angolo *ONV* del medesimo triangolo) sarà *EVQ* insieme con *NVO* uguale a un retto, che vale a dire l'angolo *OVE* sarà retto. Similmente per essere l'angolo *QFE* uguale a *NOF*, che con l'angolo *NFO*, compisce un retto, ancor l'angolo *EFO* sarà retto: onde il semicerchio descritto sul diametro *EO*, passerà per i punti *V*, *F*, comprendendo gli angoli retti *EVO*, *EFO*; Innoltre tirata per lo punto *O* la retta *AO* parallella a *VE*, che sia tagliata in *I* dalla retta *VM*, sarà l'angolo *AOV* retto per essere uguale all'alterno delle paralelle *EVO*: ma la retta *AO* è uguale ad *OI*, perchè tirando l'ordinata *MK* essendo *QG* a *GN* (b) come *QK* a *KN*, sarà ancora *EG* a *GO*, come *EM* a *MO*, sicchè ancor *EV* ad *OA* è come *EV* ad *IO*; per la qual cosa

(a) per la Prop. 18.

(b) per il Coroll. 15. prop. 9.

OA è uguale a *IO*: dunque l'angolo *OVI* sarà uguale a *OVA* ne' triangoli uguali, e simili *OVI*, *OVA*; ma l'angolo *OVA* è uguale all' angolo *OEF*, perchè sono nel medesimo cerchio, e insistono sul medesimo arco *OF*; laonde eziandio l'angolo *OVI*, sarà uguale all' angolo *OEF*: e dal punto *H* dove concorrono le rette *VO*, *EF* giunta al punto *M* la retta *HM*, sarà questa perpendicolare alla tangente *EM*, perciocchè a cagione degli angoli uguali *HVM*, *HEM* potrà descriversi un cerchio per i punti *H*, *V*, *E*, *M*, essendo retto l'angolo *HME* opposto all' altro angolo retto *HVE*; onde retto altresì sarà *HMO*, il quale essendo opposto all' altro retto *HFO*, potrà eziandio per i punti *M*, *H*, *F*, *O*, descriversi un altro cerchio; sicchè l'angolo *VEM* sarà uguale all' angolo *VHE*, e l'angolo *FMO* sarà uguale a *FHO*, per essere ne' medesimi segmenti circolari; ma l'angolo *VHE* è uguale, o pur l'istesso di *FHO*; dunque gli angoli *VME*, *FMO* compresi da i rami tirati da' fuochi *V*, *F* all'istesso punto *M* della Sezione, e dalla tangente, sono uguali. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Quindi i raggi, che dal punto *V* cadono nel perimetro della Sezione Ellittica, o Iperbolica *NM* si rifletteranno in guisa, che prolungati anderanno a concorrere nell'altro punto *F*, atteso l'angolo di riflessione *FMO*, ovvero *TMR* uguale all' angolo d'incidenza *VME*. Quindi è che tali due punti si chiamano fuochi, per essere di tal natura, che i raggi d'un lume posto in uno di essi, nel riflettersi nella curva Ellittica, e nel-

l'Iper-

l'Iperbolica ne riportano l'immagine all'altro. Lo stesso intender dovremo degli oggetti, che s'abbiano a vedere per mezzo di specchi, o Ellittici, o Iperbolici.

II. Potranno di più determinarsi i fuochi dell' Ellisse, o dell'Iperbole, se prendasi per diametro qualunque tangente *OE* intercetta dalle tangenti verticali *NO*, *QE*, e sopra di essa descrivasi un cercio da cui sarà ne' punti *F*, *V*, che saranno appunto i fuochi ricercati, tagliato l'asse per esser nel semicerchio gli angoli *OVE*, *OFE* retti.

III. Parimente tirando nell' Ellisse dal vertice *B* dell'asse secondario, sopra l'asse trasverso le rette *BF*, e *BV* uguali ambedue al semiasse trasverso *CN*, o *CQ*, saranno i punti *F*, *V* gli stessi Fuochi; imperocchè allora il rettangolo *NFQ* o *QVN* con il quadrato di *CF* o *CV*, essendo uguale al quadrato di *CN* o di *BF*, o di *BV*, cioè al quadrato di *BC*, con il quadrato di *CF*, o *CV*, sarà l'istesso rettangolo *NFQ*, o *QVN* uguale al quadrato del semiasse secondario *BC*, ciò che appunto accade nel determinare i fuochi.

IV. Nell'Iperbole, se nell'asse trasverso dal centro pongasi *CF*, o *CV* uguale alla retta *BN*, che congiunge i termini dell'uno, e dell'alrro asse, saranno i punti *F*, *V* i fuochi ricercati: perciocchè il rettangolo *QFN*, che col quadrato di *CN* uguaglia il quadrato *CF*, sarà uguale al quadrato *CB*, che con l'istesso quadrato *CN* uguaglia il quadrato *BN*.

PROPOSIZIONE XXI.

Se a qualsivoglia ramo FM, *condotto dal fuoco* F *ad un punto* M *dell'Ellisse, o dell' Iperbole, si tiri dal centro* C *la parallela* CI, *che s'incontri*

in I,

in I, con la tangente ME, *sarà* CI, *uguale al semiasse transverso* CQ, *o* CN.

Tirisi dall'altro fuoco *V* la retta *VD*, che sia paralella alle medesime *FM*, *CI*, e concorra con la tangente in *D*, e dipoi giungasi la retta *VM*, che vien tagliata in *T* da *CI*, e si tirino le tangenti verticali *QE*, *NO*; poichè l'angolo *VME* è uguale (*a*) a *FMO*, o pure a *VDM*, che l'uguaglia attese le paralelle; i lati *VM*, *VD* saranno fra loro uguali, come quelli, che s'oppongono ad angoli uguali: e sta *MI* ad *ID* come *MT* a *TV*, o come *FC* a *CV*, che sono uguali, adunque oltre i lati *MV*, *VD*, anche i lati, *MI*, *ID*, de' triangoli *MVI*, *DVI*, che hanno il lato *VI* comune, sono uguali; sicchè gli angoli ancora *MIV*, *DIV* saranno anch'essi uguali, e in conseguenza retti, e perchè sono altresì retti gli angoli *VQE*, *VNO*, il cerchio descritto intorno il diametro *VE*, passerà per i punti *Q*, *I*, e il cerchio descritto intorno al diametro *VO*, dovrà passar parimente per i punti *N*, *I*; per la qual cosa l'angolo *QIV* sarà uguale a *QEV* per esser posti amendue sul medesimo segmento del cerchio: ma l'angolo *QEV* è (*b*) uguale ad *OVN*, che uguaglierà parimente *NIO* per essere amendue nel medesimo segmento del cerchio, che passa per i punti *N*, *I*, *V*, *O*: dunque l'angolo *QIV* è uguale a *NIO*: e sommandogli amendue con l'angolo *NIV* nell'Ellisse, o sottraendogli nell'Iperbole, risulterà l'angolo *QIN* uguale al retto *VIO*. Laonde il cerchio descritto sul diametro *QN* passerà per il punto *I*, e sarà il raggio *CI* uguale al semiasse *CQ*, o *CN*. Il che dovea dimostrarsi.

FIG. 66. 67.

(a) per la Prop. prec.

(b) per la Prop. prec.

Corollarj.

I. Quindi si ricava, che nell'Ellisse la somma dell'inclinate da i fuochi a qualunque punto della curva, e la differenza di esse nell'Iperbole è uguale all'intero asse *QN*. Perocchè essendo *FV* doppia di *VC*, sarà eziandio *FM* doppia di *CT*; e per essere anco *DM* doppia di *MI*, sarà *VD*, ovvero *VM* che l'uguaglia, doppia di *TI*: sicchè nell'Ellisse la somma di *FM*, ed *VM* è doppia di amendue le *CT*, *TI*, che vale a dire è doppia di *CI*, o *CQ*, e in conseguenza è uguale a *QN*. Ma nell'Iperbole la differenza di *VM* da *MF*, è doppia della differenza di *TI* da *CT*, cioè è doppia di *CI*, o *CQ*, e conseguentemente è uguale all'asse traverso *QN*.

II. E tirando pel centro *C* una paralella *CP* alla tangente, che tagli l'uno, e l'altro ramo ne' punti *P*, *R*, saranno le rette *MP*, *MR* uguali al medesimo semiasse *CN*. Imperocchè *MP* è uguale a *CI* mediante il paralellogrammo *CIMP*: e tirando *CS* paralella al ramo *VM*, sarà *CS* uguale al semiasse; ma nel paralellogrammo R*CSM* i lati opposti *CS*, *MR* sono uguali; sicchè le rette *MP*, *MR* saranno uguali al semiasse *CN*.

III. Poichè si è dimostrata *CI*, o *CS*, uguale a *CN*, e congiunta *VI* diviene perpendicolare alla tangente, siccome sarebbe perpendicolare alla medesima ancora *FS*, quindi si deduce, che descrivendo un cerchio sul diametro *QN*, dove termineranno le rette *CI*, *CS* uguali a *CN*, del qual Cerchio la periferia sia tagliata ne i punti *I*, *S* da qualunque tangen-

te

te *MG*, giunte le suddette linee *CI*, *CS* saranno paralelle a' rami tirati al contatto *FM*, *VM*, come quelle, che sono uguali al semiasse (essendochè tali paralelle non possono incontrarsi con la tangente fuori della circonferenza circolare, perchè altrimenti non sarebbono uguali al semiasse) e fatti gli angoli *GIV*, *GSF* retti, le perpendicolarì *VI*, *SF* verranno a determinare i fuochi nell' asse: sicchè potranno ancora in questa giusa i fuochi determinarsi di queste Sezioni.

IV. Se da' fuochi *F*, *V*, a una tangente *GM* vengano tirate le perpendicolari *FS*, *VI*, sarà il rettangolo contenuto da esse uguale al quadrato del semiasse secondario *CB*, che vale a dire al rettangolo *NFQ*; o pure al rettangolo di *NO* in *QE*. Perciocchè prolungando fino alla circonferenza del cerchio *SF* in *X*, e giugnendo *XC*, sarà questa in diretto all' altro raggio *CI*; imperocchè mediante l' angolo retto *ISX*, l' arco *XSI* è una semiperiferia uguale alla semiperiferia *QIN*, e tolto di comune *NI*, l' arco *XN* è uguale a *QI*, sicchè l' angolo *XCN* è uguale a *QCI*; ma intorno a quest' angoli vi sono i lati *XC*, *CF* uguali a i lati *CI*, *CV*, e la base *FX*, uguale ad *VI*: adunque il rettangolo di *FS* in *VI* sarà uguale al rettangolo *SFX*, e perciò anche il rettangolo *NFQ*.

V. Tirata la perpendicolare *MH* alla tangente sarà l' asse diviso in proporzione armonica dall' uno, e l' altro fuoco, dalla perpendicolare, e dalla tangente: cioè sarà *FH* ad *HV*, come *FG* a *GV*. Perocchè concorrendo *FS* con *MV* in *Z*, atteso gli angoli retti *FSM*, *MSZ* uguali, e gli angoli parimente uguali *FMS*, *SMZ*, uguale a *VME*, che tutti sono adiacenti al

lato comune *MS* de' triangoli *MSF*, *MSZ*, s' uguaglieranno i lati *FS*, *SZ*: onde *FS* ad *VI* sarà come SZ ad *VI*; ma la prima ragione è la stessa, che la ragione di *FG* a *GV*, e la seconda è la stessa, che la ragione di *SM* a *MI*, o pure *FH* ad *HV*, dunque *FG* sta a *GV* come *FH* ad *HV*.

VI. Finalmente i quadrati *FS*, *VI*, *IS* sono sempre uguali all'istessa quantità, cioè ai quadrati *NV*, *VQ*, o pure a i quadrati *NF*, *FQ*. Perciocchè congiungendo *FI*, saranno i quadrati *FS*, *SI* uguali al quadrato *FI*; e posto di comune il quadrato *VI*, i quadrati *FS*, *VI*, ed *IS* uguaglieranno i quadrati *VI*, ed *IF*: ma questi quadrati sono uguali al doppio (*a*) quadrato di IC, che divide pel mezzo la base *VF* del triangolo *VIF* insieme con il doppio quadrato di *CV*, metà di detta base; e il doppio quadrato di CI ovvero CQ con il doppio quadrato di *CV* è uguale a i due quadrati delle parti disuguali *VQ*, *FQ*, ovvero *VQ*, *VN*, o pure (*b*) a i due quadrati NF, NV, ovvero NF, *FQ*: dunque i quadrati *FS*, *VI*, *IS*, sono uguali a' detti quadrati, e per questo sono sempre d'un'istessa quantità invariabile.

(a) *per il numero 8. dello Scol. 1.*

(b) *per la Prop. 9. e 10. del. 2. degl. Elem.*

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 68. 69.

Nell' Iperbole, la somma degli angoli MFB, MVB *contenuti dalle rette, che sono inclinate dall'uno, e l'altro fuoco a due punti della curva; e nell' Ellisse la differenza de' medesimi è doppia dell' angolo* MLB, *compreso dalle tangenti de' medesimi punti.*

Essen-

ESsendo nell'Iperbola l'angolo esterno *MFK*, uguale agli angoli interni *MVF*, *FMV*; sarà *MEK* con *MVF* uguale al doppio di *MVF*, col medesimo *FMV*, che è doppio parimente (*a*) dell'angolo *VMG*, dunque *MFK* con *MVF* è doppio dell'angolo *MGF*, per esser questo uguale agli angoli *MVF*, *VMG*. Nella medesima forma proverassi, che l'angolo *BFK* con l'angolo *BVF* è doppio di *BHF*: dunque tutto l'angolo *MFB* con l'angolo tutto *MVB*, sarà uguale al doppio dell'angolo *MGF*, o *HGL*, insieme con il doppio dell'angolo *BHF*, o *GHL*, che vale a dire al doppio dell'angolo *MLB* compreso dalle tangenti, è uguale a i detti angoli per essere angolo esterno. Ma nell'Ellisse, come che l'angolo *GMF*, o pure *VMI* è uguale a *MGV* con *MVF*, aggiungendo di comune *MGV*, gli angoli *GMF*, *MGV*, cioè l'esterno *MFV*, sarà uguale a *MVF* con il doppio di *MGV*: in simil maniera l'esterno *BFV* uguaglierà *BVF* con il doppio di *BHF*, o pure *LHG*: sicchè tutto l'angolo *MFB*, sarà uguale a tutto *MVB*, con il doppio di *MLB*, che è uguale agli angoli *MGV*, *LHG*: onde l'eccesso di *MFB*, sopra *MVB*, è uguale al doppio dell'angolo *MLB* compreso dalle tangenti. Il che &c.

(a) per la Prop. 20.

COROLLARIO.

Condotta pel fuoco la retta *MFT*, e tirate le tangenti *ME*, *TE*, che concorrano in *E*, sarà nell'Iperbole l'angolo *MET* sempre ottuso, siccome acuto nell'Ellisse; imperocchè gli angoli compresi da' rami *MF*, *TF*, che sono tirate in diretto al fuoco *F*, fanno la somma

di due retti; sicchè la metà dell' angolo *MET* è un retto, per lo che la somma di esso, e della metà dell' angolo *MVT* è maggiore di un retto, e l'eccesso di esso sopra la metà di *MVT* è minore di un retto; onde l'angolo *MET*, che uguaglia la somma delle due metà di *MFT*, e di *MVT* nell' Imperbole, sarà costantemente ottuso; all' incontro nell' Ellisse sarà *MET* sempre acuto per essere uguale alla differenza delle metà suddette.

PROPOSIZIONE XXIII.

FIG. 70. 17. *La distanza de' fuochi* FV *è media proporzionale fra il lato trasverso* QN, *e la linea* QG, *che è la somma nell' Iperbole, e la differenza nell' Ellisse del trasverso, e del retto* NH.

Essendocchè il rettangolo *QFN* é uguale al quadrato del semi asse conjugato *CB*, o pure alla quarta parte del rettangolo *QNH* compreso dal trasverso, e dal retto, ovvero di *QNG*, posta *NG* uguale a *NH*; se l'uno, e l'altro di questi rettangoli s'aggiunga nell'Iperbole, e si sottragga nell' Ellisse, al quadrato del semiasse trasverso *CN*, risulterà nell'Iperbole il quadrato *CF*, uguale alla somma del quadrato *CN*, e della quarta parte di *QNG*, e nell' Ellisse uguale alla differenza de i medesimi: e quadruplicando i termini, sarà il quadrato della distanza de' fuochi *FV* uguale alla somma del quadrato *QN*, e del rettangolo *QNG* nell' Iperbole, cioè al rettangolo *NQG*; nell' Ellisse poi sarà lo stesso quadrato uguale alla differenza del detto quadrato, e rettangolo, che vale a dire al rettangolo *NQG*. Dunque la di-

distanza de' fuochi *VF* è media proporzionale fra il trasverso *QN*, e la linea *QG*, che è la somma nell'Iperbole, e la differenza nell'Ellisse del medesimo trasverso *QN* dal retto *NH*, o pure *NG*. Il che &c.

COROLLARIO.

E poichè il quadrato dell'asse conjugato *AB* uguale al rettangolo *QNH*, o *QNG*, e il quadrato della distanza de' fuochi *FV*, si è dimostrato uguale al rettangolo *NQG*; sarà il quadrato *AB* al quadrato *VF*, come *QNG* a *NQG*, cioè come il parametro *NG* a *QG*, che nell'Iperbole è la somma del trasverso, e del retto, e nell'Ellisse è la loro differenza: e nella medesima maniera altresì sarà il quadrato del semiasse conjugato C*B* al quadrato della distanza d'un fuoco dal centro *CF*, o *CV*.

PROPOSIZIONE XXIV.

Nell'Iperbole, e nell'Ellisse, tirando da qualunque punto R, *la tangente* RG, *che concorra con i due diametri conjugati* CN, CA *ne' punti* G, M, *sarà il rettangolo* GRM, *uguale alla quarta parte del rettangolo contenuto dal diametro trasverso* RCS, *tirato pel contatto, e dal suo parametro, o pure sarà uguale al quadrato del semidiametro* CH *paralello alla tangente, e conjugato al diametro* RCS. FIG. 73.

Tirisi un'altra tangente *HK* alla medesima Ellisse, o pure Iperbole conjugata, e si tirino l' ordinate *HF*, RE al diametro *AB*, siccome *HI*, RO al diametro *NQ*, similmente

te *AL* a *CH*, e *AD* a CR. Per essere *CH* a *CL*, come *CK* a *CA*, o pure (*a*) come *CA* a *CF*, sarà il triangolo *HCF* uguale ad *ACL*: onde anco il triangolo *HCI*, sarà uguale ad *ADC*. Parimente *RC* a *CD*, sta come *MC* a *CA*, cioè come *CA* a *CE*, sicchè il triangolo *ADC*, sarà uguale ad *RCE*, o pure *RCO*: per la qual cosa i triangoli *HCI*, *RCO*, sono fra loro uguali; ma *GOR* sta ad *RCO*, come *GO* ad *OC*, cioè come *GR* a *RM*, o pure come *CE* ad *EM*, che vale a dire come il trangolo *REC* a *RME*; dunque il triangolo *GRO*, sarà ad *HCI*, che è uguale ad *RCO*, come il medesimo *CHI*, che è uguale a *RCE*, o puro *ADC*, al triangolo *RME*: e sono simili i triangoli *GRO*, *HCI*, *RME*; onde i loro lati omologhi, *GR*, *CH*, *RM* saranno proporzionali: sicchè il rettangolo *GRM* sarà uguale al quadrato del semidiametro *CH*, o pure alla quarta parte del rettangolo contenuto dal diametro trasverso *RS*, e del suo lato retto. Il che &c.

(a) Per il Coroll. II. Prop. 9.

Corollarj.

I. Descritto un cerchio intorno al triangolo *CMG*, la di cui periferia venga tagliata da *CR* nel punto *P*, sarà *PR* la metà del lato retto appartenente al diametro *RCS*: imperocchè essendo il rettangolo *GRM*, uguale al rettangolo *CRP*, sarà *CRP* uguale alla quarta parte del rettangolo fatto da *RCS*, e dal suo lato retto, che vale a dire, sarà uguale al rettangolo fatto dal semidiametro *RC*, e dalla metà del lato retto, o parametro, che sarà *PR*.

II. Se

II. Se questo cerchio, nella figura Iperbolica, non taglia, ma tocca il semidiametro *CR*, allora cadendo i punti *P*, e *C* nell'istesso luogo, sarà *PR* uguale a *CR*, e sarà l'Iperbole equilatera per essere la metà del lato retto uguale alla metà del diametro trasverso.

PROPOSIZIONE XXV.

L'inclinate da' fuochi FV, *a qualunque punto* R *della curva Ellittica, o Iperbolica comprendono un rettangolo* VRF, *uguale al quadrato del semidiametro* CH, *conjugato al diametro* RCS, *tirato dal punto* R, *o pure uguale alla quarta parte del rettangolo fatto dal trasverso* RS, *e dal suo lato retto*. FIG. 74. 75.

IMperocchè tirata la tangente RG, che concorra con l'asse *NQ* in *G*, e con l'altro asse conjugato *AB* in *M*, e condotta dal centro C la retta CI paralella a *VR*, se giungasi *IF* sarà questa perpendicolare (*a*) alla tangente: laonde per esser retti gli angoli *MIF*, *MCF*, il cerchio descritto sul diametro *FM*, dovrà passare per i punti *M*, *I*, *F*, *C*: onde i rettangoli *FGC*, *IGM* saranno uguali; sicchè *FG* a *GM* sarà come *IG* a *GC*, o pure come *RG* a *GV*, atteso le paralelle *CI*, *VR*, dunque *FGV* è uguale a *MGR*, e può descriversi un cerchio per i punti *V*, *R*, *M*, *F*; per la qual cosa l'angolo *FMR* è uguale a *GVR* (perciocchè nell'Iperbole l'uno, e l'altro è nel medesimo segmento, e nell'Ellisse fanno amendue la somma di due retti, con l'angolo *FVR* opposto all'uno, e conseguente all'altro) ma l'angolo ancora *FRM* è (*b*) uguale

(a) per il Coroll. 3. della Profiz. 21.

FIG. 75.

FIG. 74.

(b) per la Prop. 20.

le a VRG; dunque i triangoli FMR, GVR sono equiangoli, e simili; e perciò FR a RM sarà come GR a RV, il rettangolo VRF sarà uguale a GRM: ma questo rettangolo è uguale (a) al quadrato del semidiametro conjugato CH, che è parallello alla tangente, o pure alla quarta parte del rettangolo fatto dal diametro trasverso RS, e dal suo lato retto; dunque anco il rettangolo VRF è uguale al detto quadrato, o pure alla quarta parte del detto rettangolo. Il che &c.

(a) per la Prop. prec.

COROLLARJ.

I. Quindi è, che VR stà al semediametro RG, come la metà del parametro a questo diametro corrispondente ad RF; imperocchè il rettangolo VRF è uguale al rettangolo di RC, nel semiparametro, e questo è per l'appunto la quarta parte del rettangolo di tutto il diametro RS in tutto il parametro.

II. Se da termini del diametro RS, si giunghino al fuoco le rette RF, SF conterranno un rettangolo RFS, che sarà uguale parimente al quadrato del semidiametro conjugato CH, o pure alla quarta parte del rettangolo compreso dal diametro RS, e dal suo corrispondente parametro: perciocchè ne' triangoli FCS, RCV essendo intorno agli angoli uguali al vertice C i lati FC, CV, e SC, CR uguali, saranno altresì uguali le basi FS, VR, onde s' uguaglieranno i rettangoli RFS, VRF.

III. Nell'Ellisse i quadrati RF, RV con il doppio quadrato del semidiametro conjugato CH, sono eguali al quadrato QN; e nell'Iperbole

bole i medesimi quadrati *RF*, *RV* toltone il doppio quadrato del semidiametro conjugato *CH*, sono uguali allo stesso quadrato dell' asse *QN*. Imperocchè *QN* è uguale alla (*a*) somma delle rette *RF*, *RV* nell' Ellisse, e nell' Iperbole è uguale alla differenza di esse; dunque il quadrato *QN* è uguale a i quadrati delle medesime; aggiunto nell' Ellisse, e tolto nell' Iperbole il doppio rettangolo fatto da esse, che è l' istesso doppio quadrato *CH*.

(a) per il Coroll. 1. della prop. 21.

IV. In oltre la somma nell' Ellisse di qualunque rettangolo *VRF* con il quadrato *CR* del suo semidiametro trasverso, e nell' Iperbole la differenza di essi, è sempre d' un istessa quantità, che vale a dire, è uguale al doppio quadrato del semiasse trasverso CN, toltone il quadrato *CV* o *CF* della distanza del fuoco dal centro. Imperocchè si è visto il quadrato *QN* essere uguale al quadrato della somma delle rette *VR*, *RF* nell' Ellisse, o al quadrato della lor differenza nell' Iperbole, che vale a dire a' quadrati *VR*, *FR* più o meno il doppio rettangolo *VRF*; ma i quadrati VR, *FR*, sono il doppio de' due (*b*) quadrati CR, e *CV*; dunque il doppio rettangolo *VRF* è uguale al quadrato *QN*; e prendendone per tutto la metà, il quadrato CR, con il quadrato *CV*, più, o meno il rettangolo *VRF* è uguale alla metà del quadrato *QN*, che è il doppio del quadrato *CN* del semiasse; sicchè tolto dall' una, e l' altra parte il quadrato *CV*, sarà la somma, o differenza del quadrato CR, e del rettangolo *VRF*, uguale alla differenza del doppio quadrato CN dal quadrato *CV*, o *CF*.

(b) per il num. 5. dello Scol.

V. E perchè il rattangolo *VRF* è uguale al quadrato del semidiametro conjugato *CH*, sarà

nell'

nell' Ellisse la somma de' quadrati *CR*, e *CH*, e nell' Iperbole la lor differenza, uguale alla somma, o differenza de' quadrati dall'uno, e l' altro semiasse *CN*, e *CB*. Imperocchè la somma, o differenza de' quadrati CR, C*H*, sarà uguale parimente al doppio del quadrato C*N*, toltone (*a*) il quadrato C*V*; ma nell' Elisse il quadrato C*N*, toltone il quadrato C*V*, è uguale al rettangolo *QVN*, o pure al quadrato del semiasse C*B*; e nell' Iperbole il quadrato C*V*, toltone *QVN*, o il quadrato C*B*, è uguale al quadrato C*N*: dunque nell' Ellisse il quadrato CR con il quadrato C*H* è uguale a' quadrati C*N*, e C*B*; nell' Iperbole la differenza de' quadrati CR, C*H* è uguale alla differenza de' quadrati C*N*, e C*B*.

(a) *per il Coroll. anteced.*

VI. Quindi quadruplicati i termini saranno nell' Ellisse i quadrati degl' assi *QN*, ed *AB* presi insieme uguali a' quadrati di tutti i diametri conjugati R*S*, *HT*; e nell' Iperbole la differenza de' suddetti quadrati degli assi, sarà uguale alla differenza, che passa fra tutti i quadrati de' diametri conjugati.

VII. Sicchè l' Iperbole equilatera, di cui l' asse trasverso è uguale all' asse conjugato, e conseguentemente ancora al parametro (attesa la proporzione di queste tre linee) avrà *tutti* gli altri diametri trasversi uguali a' suoi conjugati con i parametri similmente uguali: imperocchè posto che la differenza de' quadrati degli assi de' due diametri conjugati, sia dappertutto l' istessa, se non vi è differenza fra i primi, non vi può essere in conseguenza nè anco fra i secondi.

PRO-

PROPOSIZIONE XXVI.

Nell'Elisse, e nell'Iperbole qualunque diametro HT *è media proporzionale fra l'asse trasverso* NQ, *e la retta* RS *paralella alla medesima* HT, *e tirata per uno de' Fuochi* F.

TAV. VIII. FIG. 76. 77.

IMperocchè tirando la tangente *RG*, e dall' altro fuoco *V*, tirando *VD* paralella alle rette *HT*, *RS*, se giungasi *RD*, che sarà divisa nel mezzo in *E* dal diametro *HT*, per essere la sua ordinata, siccome la retta *FV* è divisa per mezzo nel centro *C* dal medesimo diametro paralello alle rette *FR*, *VD*; sarà *CE* media Aritmetica fra le rette *FR*, *VD*, opure *FR* ad *FS*, che è uguale ad *VD* (atteso l' essere in uguale distanza dal centro, l'una, e l'altra inclinata alla curva con l'angolo *NFS*, o *RFQ* uguale a *QVD*) onde il doppio di *CE*, che è media, sarà uguale alla somma dell' estreme *RS*: ma *CH* è media Geometrica (*a*) fra *CE* e *CG*; e *CG* paralella a *FR* è uguale al semiasse (*b*) trasverso *CN*; dunque saranno ancora proporzionali *RS* doppia di *CE*, *HT* doppia di *CH*, e *QN* doppia di *CG*. Il che ec.

(a) per il Coroll. 11. della Proposiz. 9.
(b) per la Prop. 21.

COROLLARJ.

I. Dunque il quadrato del diametro *HT* è uguale al rettangolo fatto dall' asse trasverso *QN*, e dalla retta *RC* sua paralella, e tirata pel fuoco.

II. Ondè se più linee vengano tirate pel fuoco, saranno tutte fra loro come i quadrati de' diametri ad esse paralelle.

III. Di più sarà la retta *SR* ad *MA* lato ret-

to

to del suo diametro *MK* al quale è ordinata, come lo stesso diametro *MK* all'asse trasverso *NQ*: imperocchè il quadrato *HT* è uguale al rettangolo di *AMK*, come lo è il rettangolo di *RS* in QN; saranno perciò questi rettangoli uguali fra loro, e conseguentemente *RS* ad *AM* sarà come *MK* a *QN*.

IV. Essendo *RS* divisa nel mezzo in O dal diametro *MK*, sarà il quadrato OR al quadrato *HC*, come il rettangolo *KOM* al quadrato *MC*; ed essendo le rette *RS*, *HT*, *NQ* proporzionali, siccome le loro metà *OR*, *CH*, *CN*, sarà il quadrato *OR* al quadrato *CH*, come il quadrato *CH* al quadrato *CN*; onde il rettangolo *KOM* al quadrato *MC*, stà come il quadrato *HC*, o il (*a*) rettangolo ad esso uguale *VMF* al quadrato *CN*.

(a) *per la Prop. prec.*

V. E permutando, saranno i rettangoli *KOM*, *VMF*, come i quadrati del semidiametro *CM*, e del semiasse *CN*; o pure come i quadrati dell'uno, e dell'altro intero *MK*, *NQ*.

VI. Essendo i rettangoli *NFQ*, *SFR*, come il quadrato *QN* (*b*) al quadrato *HT*, saranno ancora (*c*) come *QN* a *SR*; onde i rettangoli fatti da porzioni di linee tirate per i fuochi saranno sempre fra loro come le medesime linee intiere.

(b) *per il Coroll.* 3. *della Prop.* 18.

(c) *per il Coroll.* 2. *di questa Propos.*

VII. E la retta *FM* sarà alla quarta parte del parametro *MA*, appartenente al diametro *MK*, come l'istesso diametro *MK* ad un'altra *MV*, inclinata dall'altro fuoco *V*: imperocchè *VMF* uguale al quadrato *CH* è uguale altresì al rettangolo di *MK* nella quarta parte del suo parametro.

PRO-

PROPOSIZIONE XXVII.

La somma dell' inclinate da' fuochi al medesimo punto dell' Iperbole, e la loro differenza nell' Elisse, cioè FR *più, o meno* VR *sta alla distanza* CO *dell' ordinata* RO *dal centro, come la distanza de' fuochi* VF *al semiasse traverso* CN. FIG. 78. 79.

IMperocchè tirando dal fuoco *F*, e dal centro *C*, alla tangente *TRG* le paralelle *FH*, *CM*, che concorrano con *VR* ne' punti *H*, *M*, e tirando *CI*, che sia paralella a *VR*, siccome *RO*, che sia ordinata all' asse; per essere gli angoli *FRI*, *VRT* uguali, saranno uguali altresì gli angoli *RFH*, *RHF*; onde *HR* sarà uguale a *RF*; sicchè *VH* sarà la somma nell' Iperbole, e la differenza nell' Elisse delle dette inclinate *FR*, *VR*; ma *VH* ad *VF* sta come *VR* ad *VG*, o pure come *CI*, uguale a *CN*, a *CG*, o pure come *CO* a *CN* (per essere continue proporzionali le rette *CO*, *CN*, *CG*) dunque sarà *VH* ad *VF*, come *CO* a *CN*; e permutando *VH* somma, o differenza dell' inclinate da' fuochi a *CO*, distanza dell' ordinata *RO* dal centro, sarà come la distanza de' fuochi *VF* al semiasse *CN*. Il che ec.

COROLLARI.

I. Dunque le somme, o le differenze delle inclinate da' fuochi a diversi punti della curva Iperbolica, o Ellittica, sono come le distanze dell' ordinate dal centro, per essere quelle somme, o differenze a queste distanze nella medesima costante ragione di *VF* a *CN*.

II. On-

II. Onde se dovessimo tirare da i fuochi a diversi punti dell'Iperbolica, o dell'Elittica curva linee tali, che le loro somme, o differenze esser dovessero in qualche data ragione, prese in tal ragione le distanze dal centro, si tirino quindi l'ordinate all'asse, e in cotal guisa l'inclinate da' fuochi a' termini di queste ordinate soddisferanno al quesito.

PROPOSIZIONE XXVIII.

FIG. 80. 81. 82.

In ogni Sezione Conica ordinata pel fuoco all'asse la retta FM, *e tirate le tangenti* MG, NO, *sarà* FM *la metà del lato retto*, *e di più* NO *uguale ad* NF.

Sia *NX* il lato retto, sarà nella Parabola *NF* la di lui quarta parte, e la retta *FM* è media proporziole fra l'ascissa *FN*, e il medesimo parametro *NX*, atteso il quadrato *MF* uguale al rettangolo *FNX*; dunque *FM* è la metà del parametro *NX*, essendo fra 4. ed 1. medio proporzionale il 2. E perchè *GF* è doppia di *FN*, sarà *GF* uguale a *FM*, per essere ancor questa doppia di *FN*, onde *NG* è uguale ad *NO*; ma *NF* è uguale a *NG*, dunque ancor essa è uguale ad *NO*.

Ma nell'altre Sezioni essendo il rettangolo *QFN* al quadrato *MF*, come il trasverso *QN* al retto *NX*; o pure come il rettangolo *QNX* al quadrato *NX*; sarà permutando *QFN* a *QNX*, come il quadrato *MF* al quadrato *NX*; ma il primo è la quarta parte del secondo, dunque anco il terzo sarà la quarta parte del quarto, sicchè la retta *MF* dovrà essere la metà di *NX*, perchè il suo quadrato sia la quarta parte dell'al-

l'altro; E poichè QFN è la quarta parte di QNX, sarà uguale al rettangolo contenuto dalla metà del trasverso CN, e dalla metà del parametro, che vale a dire MF; ma QFN è uguale ancora al (a) rettangolo CFG; onde il rettangolo di CN in MF sarà uguale anch'esso a CFG; sicchè CF a CN, o pure CN a CG, sarà come MF a FG, cioè come ON a NG; ma FN a NG è nella medesima ragione di CF a CN, o di CN a CG, perchè dividendo le differenze de' termini sono come i medesimi termini proporzionali, dunque ON è uguale ad FN, avendo amendue la stessa ragione a NG. Il che &c.

(a) per il Coroll. 9. della Proposiz. 9.

COROLLARJ.

I. Nella Parabola sono uguali le rette GF, FM; nell'altre Sezioni non s'uguagliano, ma sono bensì in ragione di GN a NO, o pure NF a questa uguale; ma GN a NF sta (b) come GQ a QF; attesochè il diametro è tagliato armonicamente dal concorso dell'ordinata, della tangente, co' suoi termini; dunque GF a FM sta come GQ a QF.

(b) per il Coroll. 12. della Proposiz. 9.

II. E perchè nell'Iperbole GQ è minore di QF, e all'incontro nell'Ellisse è maggiore, perciò GF è sempre minore dell'ordinata FM nell'Iperbole; è maggiore all'opposto nell'Ellisse.

III. Giunta la FO, sarà l'angolo NFO la metà d'un retto, mercè l'uguaglianza de' lati NF, NO.

PROPOSIZIONE XXIX.

FIG. 80. 81, 82.

Poste l'istesse cose, e ordinata all' asse qualunque altra retta TBH, *che tagli la tangente* GM *in* A, *se tirisi dal fuoco alla curva la retta* FH *sarà essa uguale a* BA.

IMperocchè il rettangolo *TAH* al quadrato della tangente *AM*, sta come il quadrato *NO* al (*a*) quadrato *OM*; ma *NO* è uguale (*b*) ad *NF*; dunque sarà ancora come il quadrato *NF* al quadrato *OM*; oppure come il quadrato *FB* al quadrato *AM*, così il rettangolo *TAH* al quadrato *AM*; onde il detto rettangolo è uguale al quadrato FB; e aggiunto di comune il quadrato *BH*, sarà il rettangolo *TAH* con il quadrato *BH* uguale alla somma de' quadrati *FB*, *BH*; che vale a dire il quadrato *BA* sarà uguale al quadrato *FH*; dunque il ramo *FH* tirato dal fuoco è uguale all' ordinata *BA* prolungata fino alla tangente. Il che &c.

(a) per la Propos. 16.
(b) per la Prop. prec.

COROLLARJ.

I. Quindi è manifesto, che i rettangoli *TAH* fatti dall' ordinate all' asse, prolungate fino alla tangente *GM*, e dalla loro parte esterna, sono uguali al quadrato di *BF*, che è la distanza del fuoco dall' ordinata.

II. Quindi potrà descriversi qualunque Sezione Conica, se prolungando i lati *GF*, *GM* del triangolo rettangolo *GFM*, si tirino in qualunque modo l'ordinate *BA*, *ba* paralelle ad *FM*, e dal punto fisso *F* s'inclinino le rette *FH*, *Fb* uguali alle dette ordinate; imperocchè se il lato

to *GF* è uguale ad *FM*, saranno i punti *H*, *h* nella curva Parabolica; che se *GF* è maggiore di *FM*, saranno nell'Ellitica; e se finalmente *GF* è minore di *FM*, saranno nell' Iperbolica, siccome nell'altra opposta.

III. Dal punto, dove la tangente *MG*, tirata dal termine dell'ordinata al fuoco *FM*, concorre con l'asse, tirando una retta *GPK* paralella all'ordinate, sarà questa nell'Ellisse, e nell'Iperbola (secondo ciò che si disse nella Parabola alla Proposizione 19.) *la Linea d'altezza*, alla quale tirata da qualsivoglia punto *H* della curva la paralella all'asse *HK*, siccome ancora *MP*, sarà sempre il ramo *FH* condotto dal fuoco a qualunque punto *H*, all'istessa *HK*, come *FM* a *MP*, o pure come *FN*, o *NO*, che egli è uguale, ad *NG*: perciocchè per essere in tal ragione le rette *AB*, *BG*, saranno altresì nella medesima le rette *FH*, *HK*, che ad esse sono uguali.

IV. Finalmente se dal fuoco alla *Linea d'altezza* si tiri qualunque inclinata *FHS*; e tirato un altro ramo *FL* si conduca a *FS* una paralella *LR*, che sta terminata dall'istessa *linea d'altezza*, sarà in ogni Sezione *FH* ad *HS*, come *FL* a *LR*; imperocchè tirate le paralelle all'asse *HK*, *LP*, per essere *FH* ad *HK*, come *FL* a *LP*, ed *HK* ad *HS*, come *LP* a *LR*, atteso i triangoli simili *KHS*, *PLR*, sarà per l'ugualità in proporzione ordinata *FH* ad *HS*, come *FL* a *LR*. FIG. 83.

PROPOSIZIONE XXX.

Se dal contatto dell'Iperbole, o dell'Ellisse si tiri alla tangente una perpendicolare MP, che venga terminata dall'asse trasverso, e dal centro FIG. 84. 85.

C si tiri un' altra perpendicolare CS *alla medesima tangente, sarà il rettangolo di* PM *in* CS, *uguale al quadrato del semiasse conjugato* CA, *o pure alla quarta parte del rettangolo contenuto sotto il trasverso, e il retto corrispondente.*

SI tirino l'ordinate *MK*, *MR* all'uno, e all' altro asse; saranno i triangoli *HCS*, *PMK* simili; perciocchè essendo i lati *SC*, *MP* paralelli, l'angolo *MPK* è uguale a *SCP*, o pure *CHS* (per essere ciascuno di questi con l'angolo *HCS* la somma d'un retto) e gli angoli *MKP*, *HSC* sono retti, e in conseguenza uguali; dunque *MP* a *MK* sta come C*H* a C*S*; sicchè il rettangolo di *MP* in C*S* è uguale al rettangolo di C*H* in *MK*, o pure C*R*, che ad essa è uguale; ma il rettangolo *H*CR è ugale (*a*) al quadrato C*A*; dunque il rettangolo di *MP* in C*S* è uguale anch'esso al quadrato C*A* del semiasse conjugato, o pure alla quarta parte del rettangolo fatto dal trasverso, e dal suo parametro.

(a) *per il Coroll.* II. *della Proposiz.* 19.

COROLLARJ.

I. Poichè il rettangolo compreso dalle tangenti verticali *QE*, *NO* è uguale al medesimo quadrato del semiasse conjugato, sarà uguale altresì al rettangolo di *PM* in C*S*; onde *QE* a C*S* sarà come *PM* ad *NO*.

II. E per la somiglianza de' triangoli *EGQ*, *CGS*, *PGM*, *OGN*, essendo *QG* a *QE* come *GS* a C*S*, come *GM* a *MP*, come *GN* a *NO*, poichè i conseguenti sono proporzionali, saranno ancora gli antecedenti proporzionali, cioè *QG* a *GS* sarà come *GM* a *GN*; onde s'uguaglieranno i rettangoli *QGN*, *MGS*.

III.

III. Per la stessa ragione saranno proporzionali i lati rimanenti *EG*, *CG*, *CP*, *GO*; onde il rettangolo *EGO* sarà uguale a CGP.

PROPOSIZIONE XXXI.

Se da qualsivolglia punto M *di qualunque Sezione Conica si tiri alla tangente* ME *una perpendicolare* MP, *che concorra con l'asse in* P, *e dipoi tirando da uno de' fuochi* F *il ramo* FM, *si conduca ad esso dal punto* P *una perpendicolare* PD, *sarà la porzione* MD *uguale al semiparametro dell'asse.*

FIG. 8.

NElla Parabola è cosa manifesta, è chiara; imperocchè tirando il diametro *MR* paralello all'asse, e ordinando all'asse medesimo la retta *MK*, saranno i triangoli *MPD*, *PMK* uguali, e simili, attesochè l'angolo *DMP* uguale a *PMR* (de' quali ciascuno fanno con gli angoli uguali *DME*, *RMS* la somma di un retto) è uguale ancora all'angolo *MPK*; ed essendo comune l'Ipotenusa *MP*, anco i lati omologhi *DM*, *PK* sono uguali; ma la Subnormale *PK* è uguale alla metà (*a*) del lato retto; dunque all'istessa metà del lato retto è uguale ancora *MD*.

(a) Per il Coroll. 16. della Proposiz. 9.

Ma nell'Ellisse, e nell'Iperbole tirata dal centro alla tangente la retta *CI* paralella al ramo *FM*, e la *CS* perpendicolare, o paralella ad *MP*, sarà l'angolo *ICS* uguale a *PMD*; imperocchè l'uno, e l'altro di essi con l'angolo *CIS*, o l'uguale *FME* compisce un retto; onde ne' triangoli simili *ICS*, *PMD* sarà *IC* a *CS*, come *MP* a *MD*, e il rettangolo d'*IC* in *MD* sarà uguale al rettangolo di *CS* in *MP*; ma questo

FIG. 87. 88.

F 3 è ugua-

è uguale alla quarta (*a*) parte del rettangolo compreso dall'asse *QN*, e dal suo parametro, cioè al rettangolo di *CN* nel semiparametro; dunque ancor l'altro di *IC* in *MD* è uguale a questo medesimo; perlochè essendo *IC* uguale al (*b*) semiasse *CN*, sarà *MD* uguale al semiparametro. Il che &c.

(a) *per la Prop. prec.*

(b) *per la Prop.* 21.

Corollari.

In oltre tirando il ramo *VM*, e dal punto P la perpendicolare ad esso *PR*, anco *MR* sarà uguale al semiparametro, essendo ne' triangoli *MPD*, *MPR* tutti i lati uguali, che vale a dire *MD* uguale ad *MR*, e *PD* a *PR*, a cagione degli angoli uguali *DMP*, R*MP*, e *DPM*, *RPM*.

PROPOSIZIONE XXXII.

FIG. 87. 88.

Nell' Ellisse, o nell' Iperbole il rettangolo GCP *compreso dalle distanze, che sono fra il centro, e i due concorsi con l'asse, della tangente* MG, *e della perpendicolare* MP, *è uguale al quadrato della distanza di qualsivoglia fuoco dal centro, come* CF, *o* CV.

IMperocchè *VG* a GF sta come (c) *VP* a *PF*; dunque componendo nell' Ellisse, e dividendo nell' Iperbole, sarà *VG* più o meno *GF* a *GF*, come *VP* più o meno PF a PF; cioè a dire la doppia CG a GF sta come la doppia CF a PF; e presa la metà degli antecedenti, sarà CG a GF, come CF a PF; e finalmente paragonando i medesimi antecedenti con la differenza de' termini nell'Ellisse, o con la somma nell' Iperbole, sarà CG a CG più o meno GF, cioè

(c) *per il Coroll.* 5. *della Prop.* 21.

cioè, a *CF*, come *CF* a *CF*, più o meno *PF*, cioè a *CP*; onde il rettangolo *GCP* è uguale al quadrato di *CF*, o pure di *VC*, per essere continue proporzionali *CG*, *CF*, *CP*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi il quadrato del semiasse *C N* al quadrato di C *F*, distanza del fuoco dal centro, sta come *CK* a *CP*, cioè come la distanza dell'ordinata all'asse MK dal centro, alla distanza del punto *P*, dove concorre la perpendicolare *M P* con l'asse dal centro medesimo: imperocchè il quadrato *CN* è uguale a *GCK*, e il quadrato *CF* si è visto uguale a *GCP*, i quali rettangoli sono appunto in ragione di CK a *CP*.

II. Onde *CK* a *CP* è sempre nella medesima ragione del quadrato *CN* al quadrato *CF*, in qualunque luogo si prenda il punto *M*.

PROPOSIZIONE XXXIII.

In ogni Sezione Conica, se le tangenti BE, DE *concorrano in* E, *e si tiri dal punto* E *una retta, che tagli la Sezione in* A, *ed* H, *e la retta, che congiunge i contatti* B, D *in* I, *sarà questa divisa in proporzione armonica, cioè sarà* EH *ad* HI, *come* EA *ad* AI.

TAV. IX. FIG. 89. 90. 91.

DAl punto *E* si tiri il diametro, che tagliando pel mezzo la corda *BD* in *K*, taglierà, pel mezzo altresì ne' punti *L*, *R* le parallele ad essa *AM*, *HS* tirate da' punti *A*, ed *H*, e concorrenti con una delle tangenti EB ne'

F pun-

punti O, P. Pertanto il quadrato RE al quadrato EL sta come il quadrato PR al quadrato OL, o pure come il quadrato HR al quadrato AL, o pure come il rimanente rettangolo HPS al rettangolo AOM; ma questi rettangoli sono come i quadrati delle (a) tangenti PB, OB; dunque il quadrato PB al quadrato OB sta come il quadrato RE al quadrato EL, o pure come il quadrato PE al quadrato EO. Sicchè la tangente EBP è divisa armonicamente, essendo PE ad EO, come PB a BO; onde è che la retta EH sarà divisa anch'essa dalle medesime paralelle PR, BD, OM in proporzione armonica, e sarà EH ad EA, come HI ad IA. Il che &c.

(a) per il Coroll. 5. della Proposiz. 16.

Corollarj.

I. E viceversa tirando dal punto E d'una tangente EB la retta EH, che tagli la Conica Sezione in A, ed H, se pongasi HE ad EA, come HI ad IA, e giungasi BI, che concorra con la Sezione in D, tirata la ED, sarà parimente tangente: imperocchè se la tangente tirata a quella parte dal punto E non concorresse con la Sezione in D, ma la toccasse in altro punto, tirando da quest' altro contatto una retta al contatto B, taglierebbe AH in un punto diverso da I: di cui le parti sarebbero nondimeno in ragione di HE ad EA, attesa la divisione armonica. Ma non può esser giammai, che la retta HA sia divisa in un punto diverso dal punto I nella stessa ragione di HI ad IA; dunque la tangente tirata dal punto E verso D non può toccar la curva in altro punto, che in D.

II. Pa-

II. Parimente preso il punto *E* fuor della Sezione Conica, e tirando da esso la segante *EAH*, che sia divisa armonicamente in quei punti, ed in *I*, se dal punto *E* si tiri il diametro, e s'ordini ad esso dal punto *I* la retta *BID*, le congiunte *EB*, *ED* saranno tangenti; imperocchè se toccassero altrove la retta, che giunge i contatti, taglierebbe *EH* armonicamente fuori del punto *I*, il che non può essere in verun conto.

III. Nell'istessa guisa se due seganti *EAH*, *EMS*, condotte dal punto *E*, fossero tagliate armonicamente in altri punti *I*, *X*, e ne' precedenti, tirata la retta *IX*, che tagli la Sezione in *B*, *D*, congiunte le rette *EB*, *ED*, toccheranno amendue parimente la curva per la ragione di sopra apportata.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Se dal concorso E *delle tangenti* ED, EB *si tirino due seganti* EAH, EMS, *che taglino la Sezion Conica ne' punti* A, H, *ed* M, S, *le congiunte* MA, SH *o saranno paralelle a* BD, *che giunge i contatti (come nelle figure delle Proposiz. preced.) o concorreranno in un medesimo punto* T *con la retta* BD, *e ciò sia dentro, o fuori della Sezione.*

FIG. 92. 93. 94.

IMperocchè se *AM* è paralella a *BD*, sarà *EA* ad *AI*, come *EM* ad *MX*; ma *EA* ad *AI* sta come *EH* ad *HI* (per essere *EH* divisa in proporzione armonica, onde *EH* ad *EA* sta come *HI* ad *AI*) parimente *EM* a *MX*, sta come *ES* a *SX*; dunque *EH* ad *EA* sta come *ES* ad *EM*; onde anche *HS* è paralella ad *AM*, e *BD*. Che se poi non sono paralelle,

le, ma concorra HS con BD nel punto T, si tirino per A, ed M le rette TAZ, FMG parallelle ad HT, concorrenti con TI ne' punti T, F, siccome con la retta ET, congiunta ne' punti Z, G; sarà HT ad AZ, come HE ad EA, o pure come HI ad IA, ovvero come la stessa HT ad AT per la similitudine de' triangoli TIH, IAT; sicchè AZ, sarà uguale ad AT. In somigliante guisa sarà MG uguale ad MF; perciocchè essendo SE ad EM, come SX a XM, sarà eziandio ST a MG, come la medesima ST a MF, mercè de' triangoli simili TXS, MXF; dunque se giungasi TM, sarà in diretto ad MA, poichè nel triangolo TTZ le parallelle TZ, FG si segano nella stessa egualità di proporzione, e perciò TMA sarà tutta una linea; altrimenti giugnendo l'AT se non passasse per M, taglierebbe per mezzo FG in un punto diverso da M, il che è un assurdo. Dunque le rette HS, AM concorrono insieme con la retta BD nel punto T. Il che &c.

COROLLARI.

FIG. 95. 96. I. Se le seganti EAH, EMS fossero infinitamente prossime, le rette AM, HS infinitamente picciole, potrebbero considerarsi come parti infinitesime della Curva, onde prolungate al punto T della retta BD, sarebbero anch'esse tangenti della Sezion Conica. Per lo che se dal concorso E di due tangenti si tiri una linea EAH, che tagli la Sezione ne' punti A, ed H, tirando da questi punti due altre tangenti, concorreranno esse nel punto T della retta BD, che giugne i primi contatti; o pure tirando una sola tangen-

te *AT*, che concorra con *BD* in *T*, si giunga *TH*, ancor'essa sarà tangente.

II. Di più la retta *TB* sarà divisa armonicamente ne' punti *T*, *D*, *B*, e nel concorso *I* dove s'incontra con la segante, di modochè *BT* a *DT*, sarà (*a*) come *BI* ad *ID*.

(a) per la prec. Proposiz. 31.

PROPOSIZIONE XXXV.

Tirata dal punto E *concorso delle tangenti* EB, ED *qualunque segante* EAIH, *che concorre in* I *con* BD *tirata per i contatti, se pongasi* AM *paralella all'istessa* BD, *giunta la* HM, *taglierà questa* BD *per mezzo nel punto* K, *di poi concorrendo con la retta* EV *tirata dal punto* E *paralella a* BD, *sarà essa divisa in proporzione armonica ne' punti* H, K, M, V; *che vale a dire sarà* HV *ad* VM, *come* HK *a* KM.

FIG. 97. 98.

Poichè *BD*, *AM*, *EV* sono paralelle fra loro, saranno le rette *EH*, *VH* tagliate da esse nella medesima ragione; ma *EH* è tagliata da esse in proporzione armonica, dunque sarà divisa anche *VH* in tal proporzione, onde *HV*, ad *VM* sarà come *HK* a *KM*; ma tirando *EK*, che tagli in *L* la retta *AM*, ed in *G* la paralella ad essa *HG*, sarà come *HV* ad *VM*, o pure *HE* ad *EA*, così *HG* ad *AL*, e così *HK* a *KM*, e perciò *HG* ad *LM* a cagione de' triangoli simili *GKH*, *LKM*: adunque *HG* ad *AL*, è come la medesima *HG* a *LM*; onde *AL* è uguale a LM. Per la qual cosa la retta *AM*, siccome la sua paralella *BD*, sono ordinate amendue al diametro *ELH* tirato dal concorso *E* delle tangenti; onde è, che BD è di-

divisa pel mezzo in K, dall'istessa segante HMV. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi può dedursi, che se pel punto di mezzo K della retta BD, che giugne i due contatti, si conduca qualsisia retta HK, che tagli la curva ne' punti H, M, e la retta EV, paralella all'istessa BD, in V, sarà divisa la detta HK armonicamente ne' punti V, M, K, H.

II. Se da qualsivoglia punto V della retta EV, paralella a BD, si tiri VA tangente della Sezione, e dal punto A si tiri per K, la retta AK, che convenga con la Sezione in S, giugnendo VS, sarà una tangente ancor essa; perciocchè è VH divisa armonicamente (a) ne' punti V, M, K, H, e per essere tangente VA, ancora VS bisogna che sia tangente: imperocchè se toccasse la curva sopra, o sotto il punto S, la retta che giugne i contatti, taglierebbe MH fuori del punto K, dove è tagliata dalla AS; ma (b) la retta, che giugne i contatti, divide armonicamente la segante, tirata dal concorso delle tangenti; dunque HM sarebbe tagliata in un punto fuor di K in ragione di HV ad VM, che è l' istessa di HK a KM; il che è impossibile.

(a) per questa Propos.

(b) per la Propos. 33.

III. Quindi raccogliesi, che le tangenti tirate da' termini di linee infinite condotte per un qualche punto K concorrono sempre fra loro in una istessa linea EP (purchè il punto K non sia centro della Sezione, perchè sarebbero allora le tangenti tirate da' termini di diametri condotti pel centro, onde sarebbero paralelle, e per-

perciò non potrebbero insieme concorrere) la qual retta *EP* è paralella a *BD*, che da quel punto *K* vien segata per mezzo, ed è tirata dal punto *E* concorso delle tangenti *BE*, *DE*, tirate dalle estremità dell'istessa *B D*. E tutto ciò vuol dire, che tanto *SV*, *AV*, quanto *MP*, *HP* convengono fra loro costantemente nella linea *VEP*, per questa Proposizione.

Per la qual cosa se pel fuoco *F* si conduca qualsivoglia linea *RS*, le tangenti tirate dalle sue estremità *RV*, *SV* concorreranno in *V* nella linea *d'altezza EV*, che vien condotta pel concorso delle tangenti tirate da' termini dell' ordinata pel fuoco, paralella alla medesima ordinata, della qual linea *d' altezza* si è parlato nella Proposiz. 19. alla Parabola, e nel Corollario 3. della Proposizione 29. all' Iperbole, e all' Ellisse. FIG. 98.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Dal fuoco F *di qualunque Sezione Conica, tirando alla curva due rami* FA, FB, *e dagli stessi punti* A, B *due tangenti* BD, AD, *che concorrono in* D, *se giungasi* DF, *taglierà pel mezzo l'angolo* AFB *compresi da' rami medesimi.* FIG. 99. e 100.

Concorra *D F* con la Sezione ne' punti *R*, *S*, e con la retta *BA*, che giunge i contatti in *I*; dipoi si tirino le tangenti *RV*, *SV*, e converranno (a) con *BA* in *V*, il qual punto *V* sarà (b) nella linea *d'altezza EV*; sicchè tirando all' istessa linea d' altezza le perpendicolari *AH*, *BP*, sarà come *BP* ad *AH*, così *BV* ad *VA*; ma per essere *BV* ta[illegible] armonicamente (c) ne' punti *B*, *I*, *A* [illegible] come BV ad VA [illegible]

(a) Coroll. 1. Prop. 34.
(b) Coroll. 4. Prop. 34.
(c) Coroll. 2. Prop. 34.

così sta BI ad IA: dunque BI ad IA sta come BF a FA: la qual ragione è l'istessa della ragione di BP ad AH, per essere tanto BF a BP, che FA ad AH nella medesima (*a*) ragione di FN ad NE. Per la qual cosa l'angolo AFB è diviso per mezzo dalla retta DF, essendo la base AB tagliata in I in ragione de' lati del (*b*) triangolo ABF. Il che &c.

(a) Coroll. 3. Prop. 29.

(b) Per la 3. del 6. di Eucl.

COROLLARI.

I. Quindi, se *i rami* tirati dal fuoco sono in diritto, resulta, che facendo passare qualunque retta SR pel fuoco, e tirando da' i termini le tangenti SV, RV, che convengono in V con la linea *d'altezza*, giunta la VF, sarà questa perpendicolare a RS; perciocchè gli angoli SFV, RFV sono uguali a due retti, la metà de' quali è ciascuno angolo VFS, VFR retto, come dimostrossi nella Parabola al Corollar. 9. della Proposiz. 29.

II. Da qualsivoglia punto A preso nella curva intercetta fra i termini R, S d'una retta condotta pel fuoco, tirisi un'altra tangente AT, che concorra con le tangenti RV, SV in G, T, e giungendo al fuoco le rette GF, TF, queste conterranno un angolo retto GFT; poichè essendo l'angolo GFA la metà dell'angolo RFA, e l'angolo AFT la metà dell'angolo AFS, sarà l'angolo GFT la metà degli angoli RFA, AFS, che fanno la somma di due retti.

FIG. 101. 102.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVII.

TAV. X. FIG. 103.

Se nella tangente d'un Iperbole ANR *al vertice di qualunque diametro* NQ, *si prendano le porzioni* NA, NR *uguali al semidiametro conjugato* CB, *ovvero tali, che i loro quadrati agguaglino la quarta parte del rettangolo sotto il trasverso* QN, *ed il retto* NS, *dipoi congiunte dal centro* C *le rette* CA, CR *in qualunque modo si prolunghino, queste non potranno giammai concorrere con la curva Iperbolica, sebbene ad essa s'accosteranno sempre per uno spazio minore di qualunque dato intervallo* P. *Chiamansi queste rette* Asintoti *dell'Iperbole*.

IMperocchè ordinata al medesimo diametro la retta *MKV*, che sia parallella alla tangente, e che tagli i detti Asintoti ne' punti *D*, *Z*, sarà il quadrato *DK* al quadrato *CK*, come il quadrato *AN*, che è la quarta parte del rettangolo *QNS*, al quadrato *NC*, che parimente è la quarta parte del quadrato *QN*, e perciò sarà come il rettangolo *QNS* al quadrato *QN*, che vale a dire come il parametro *NS* al trasverso *QN*, nella qual ragione appunto è il quadrato dell'ordinata MK al (*a*) rettangolo *QKN*: laonde per essere tutto il quadrato *DK* al quadrato tutto *CK* come il quadrato MK tolto dal primo al rettangolo *QKN* tolto dal secondo, sarà il rimanente di quello al rimanente di questo, cioè il rettangolo DMZ al quadrato CN, come il quadrato AN al quadrato *CN*: onde è cosa chiara che il detto rettangolo *DMZ* è eguale al quadrato AN, o pure al rettangolo *ANR*; dunque come MK a NR,

(a) per il Coroll. 6. della Propofiz. 5.

a *NR*, così *AN* a *DM*, e la prima è sempre molto maggiore della seconda, dunque eziandio la terza sempre sarà maggiore della quarta; e perciò prolungandosi in infinito l' Iperbole, siccome sempre maggiore diventerà *MZ* di *NR*, così la retta *AN* diverrà maggiore dell' intervallo *DM*, il quale intervallo s' anderà sempre scemando in infinito, secondochè cresce di mano in mano la retta *MZ* in infinito; sicchè la ragione di *AN* a *DM* potrà diventar maggiore di qualunque data ragione di *AN* a *P*, siccome di tal ragione potrà diventar maggiore anco quella di *MZ* a *NR*; essendochè può crescere in infinito tanto l' ordinata *MK* dell' Iperbole, quanto l' ordinata *ZK* del triangolo, e qualunque di loro, e molto più la loro somma *MZ* può diventar maggiore di qualunque data nella maggior distanza dalla cima *N* dell' Iperbole. Dunque *CA* si va sempre accostando alla curva dell' Iperbole *NM*, secondochè scema l' intervallo *DM*, che può divenir minore di qualunque dato *P*, nè giammai con essa curva concorre; e la ragione si è, che il punto *M* è sempre discosto dal punto *D*, perchè possa il rettangolo *DMZ* essere uguale al quadrato *AN*, come abbiamo dimostrato.

COROLLARJ.

I. I medesimi Asintoti prolungati sopra l' angolo *C* taglieranno dalla tangente del vertice opposto le rette *QE*, *QX*, uguali alle prime, a cagione de' somiglianti triangoli *QEC*, *CAN*, che hanno un lato uguale a un lato, cioè *QC* uguale a *CN*: onde è manifesto, che le dette *CE*, *CX* sono parimente Asintoti dell' Iperbo-

le

le opposta QI, che ha il medesimo trasverso, e lato retto.

II. Qualunque retta BH tirata dentro l'angolo ACR paralella a un Asintoto, concorrerà con l'Iperbole; imperocchè mentre l'intervallo della Iperbole dall'Asintoto va continuamente scemando, e diventa minor di qualsivoglia dato, l'intervallo di detta paralella è sempre costante, e il medesimo.

III. Molto più poi qualunque retta CB, che divida l'angolo ACR, segherà l'Iperbole, attesochè la sua distanza all'Asintoto va sempre crescendo, nel tempo istesso, che diminuisce l'intervallo dell'Iperbole dall'Asintoto medesimo.

IV. Similmente chiaro apparisce essere uguali i rettangoli DMZ, dmz, contenuti da porzioni di paralelle ordinate al diametro tagliate dalla curva Iperbolica, e dagli Asintoti, essendo ciascuno di questi rettangoli uguale al quadrato AN (il che s'intenda ancora degli altri rettangoli DVZ, duz.)

V. Finalmente le porzioni DM, VZ intercette fra gli Asintoti, e la curva dall'una, e dall'altra banda, anch'esse sono uguali, perchè siccome AN è uguale a NR, così DK è uguale a KZ, e l'ordinata MK uguaglia KV; dunque le rimanenti DM, VZ, sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Se qualsivoglia retta TD *toccherà l'Iperbole altrove, come sarebbe in* V, *concorrendo con gli Asintoti ne' punti* TD, *riuscirà* TV *uguale ad* VD, *ed il quadrato di ciascuna di esse uguale*

gliera la quarta parte del rettangolo compreso dal trasverso diametro I C V, *e dal suo lato retto* V F.

FIG. 104. IMperocchè quando ciò non fosse, prese dall' una, e dall'altra banda le parti *VB*, *VG*, i quadrati delle quali fossero uguali alla quarta parte del detto rettangolo, ne seguirebbe, che giunte le rette *CG*, *CB*, per l'antecedente Proposizione, sarebbero Asintoti; il che non può essere; perciocchè se *CG* cade di sopra a *CT*, prolungata in infinito, sempre più si scosterà da essa, e però non s'accosterà di mano in mano all'Iperbole, come l'Asintoto *CT*; che se cade dentro l'angolo asintotico *TCD*, come la retta *CB*, allora prolungandosi (a) segherà l' Iperbole; onde si vede, che *CG*, *CB* non possono essere Asintoti; sicchè i soli quadrati delle porzioni *VT*, *VD*, e non d'altre maggiori, o minori di esse, uguaglieranno la quarta parte del rettangolo compreso dal trasverso *IV*, e dal retto *VF*; onde tali porzioni saranno fra loro uguali. Il che &c.

(a) *per il Coroll.* 5. *della prec.*

COROLLARJ.

I. Posta *LKO* ordinata al diametro *CV*, e paralella alla tangente *TD*, e che concorra con gli Asintoti ne' punti *P*, *S*, sarà il rettangolo *PLS*, o *POS* uguale al quadrato *VT*, come similmente dimostrossi nella antecedente Proposizione.

II. Quindi l'intercette fra gli Asintoti, e la curva *PL*, *OS*, sono parimente uguali; onde qualunque retta *PS* tagli l'Iperbole, e gli Asintoti, le sue parti intercette tra la curva, e

gli

gli Asintoti sono sempre uguali: imperocchè divisa per mezzo *OL* in *K*, e tirato dal centro il diametro *CK*, che concorrerà con l'Iperbole in *V*, e tirata per *V* la retta *TVD* paralella ad *OL*, sarà questa la tangente divisa ugualmente in *V*, per questa Proposizione; e i rettangoli *PLS*, *POS* uguaglieranno il quadrato *TV*, o pure *VD*: onde le dette parti *PL*, *OS* saranno uguali.

III. Da ciò, che si è detto nella Proposizione s' arguisce, che non possono assegnarsi all' Iperbole altri Asintoti fuori di *CT*, *CD*.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Se qualunque linea QO, *sega l'Iperbole opposte, concorrendo con gli Asintoti ne' punti* EZ, *tirando pel centro il diametro* ICV *paralello alla detta* QO, *sarà il rettangolo* EOZ, *uguale al quadrato del semidiametro* CV. FIG. 10. 5.

Tirata la tangente *TVD*, e dal punto *O* tirata *OL* paralella ad essa, ed ordinata al diametro, che seghi gli Asintoti ne' punti *PS*; poichè il rettangolo *EOZ* al rettangolo *SOP* è in ragion composta del lato *EO* ad *OP* (o pure di *CV* ad *VT*) e di *ZO* ad *OS* (o pure di *CV* ad *VD*) e nella stessa ragion composta de i medesimi lati, sta il quadrato *CV* al rettangolo *TVD*, ovvero al quadrato *VT*; sarà il rettangolo *EOZ* a *SOP*, come il quadrato *CV* al quadrato *VT*; ma il rettangolo *SOP* è uguale (a) al quadrato *VT*, dunque eziandio il rettangolo *EOZ*, sarà uguale al quadrato *CV*. Il che &c.

(a) per la Prop. prec.

Co-

COROLLARJ.

I. In somigliante maniera mostrerassi il rettangolo ZQE uguale al quadrato CI, che è il medesimo del quadrato CV: onde saranno uguali i rettangoli EOZ, ZQE, e le rette OZ, QE sono parimente uguali; imperocchè, per essere uguali i detti rettangoli, EO ad EQ sta come QZ a ZO, onde componendo OQ a QE, sarà come OQ ad OZ; sicchè l'intercette dagli Asintoti, e dall'una, e dall'altra Iperbole QE, OZ sono uguali, siccome saranno uguali OE, QZ, e per conseguenza anche i rettangoli QEO, QZO.

II. E perchè tirando qualsivoglia altra linea $ozeq$ paralella allo stesso diametro VCI, sarà parimente il rettangolo eoz, o pure zqe, ovvero qeo, o pure qzo, uguale al medesimo quadrato CI; saranno altresì uguali i rettangoli EOZ, eoz contenuti da parti di linee pararelle intercette dall'una, e dall'altra Iperbole, e dagli Asintoti, ed in oltre le porzioni oz, qe, risulteranno uguali, siccome le porzioni oe, e zq.

PROPOSIZIONE XL.

FIG. 106. 107. *Se in una medesima Iperbole, o nelle Iperbole opposte, si prendono due punti* OV, *e si tirino da essi due rette* OS, VD *paralelle fra loro, e terminate agli Asintoti, siccome due altre rette* OP, VT *nell'istessa guisa fra loro paralelle, e terminate a detti Asintoti, sarà il rettangolo* SOP *uguale al rettangolo* DVT.

Im-

Imperocchè giunta la retta *OV*, che concorra con gli Asintoti ne' punti *I*, *L*, saranno uguali (a) l'intercette *OI*, *VL*, siccome anche le rette *OL*, *VI*: dunque *OL* ad *VL* sta come *VI* ad *OI*; ma *OP* ad *VT*, sta come *OL* ad *VL*, ed *VD* ad *OS*, come *VI* ad *OI*, a cagione de' triangoli simili; dunque *OP* ad *VT* sta come *VD* ad *OS*; sicchè i rettangoli *SOP* *DVT* sono uguali. Il che &c.

(a) per il Coroll. 1. della Propofiz. 38. e 39.

COROLLARJ.

I. Se da qualsivogliano punti *V*, *N* della Curva Iperbolica si tirino le paralelle agli Asintoti *VT*, *VD*, ed *NR*, *NA*, sarà il paralellogrammo *RNA* uguale al paralellogrammo *TVD*; perciocchè per esser questi rettangoli fra loro uguali, anche i paralellogrammi equiangoli debbono essere uguali, attesa l'ugual proporzione de' lati reciprocamente paragonali.

FIG. 168.

II. Laonde anche i triangoli *CNR*, *CVT*, che sono la metà di tali paralellogrammi, sono uguali.

III. Quindi la ragione dell'ordinate all'Asintoto *NR*, *VT*, che sono paralelle all'altro Asintoto, è sempre uguale alla ragione delle distanze *CT*, *CR* reciprocamente prese, a cagione dell'uguaglianza de' sopraddetti rettangoli, o paralellogrammi, o triangoli, che intorno agli angoli uguali debbono avere i lati reciprocamente proporzionali.

IV. Tirate le tangenti *PNM*, *HVG*, che vanno a terminare agli Asintoti, e che sono segate per mezzo (b) ne' contatti *N*, *V*, saranno uguali eziandio i triangoli *CPM*, *CHG* descritti

(b) per la Prop. 38.

scritti nello spazio Asintotico, come quelli, che sono doppj di paralellogrammi uguali *RNA*, *TVD*, o pure quadrupli di triangoli uguali *CNR*, *CVT*.

V. I misti quadrilateri *RNVT*, ed *ANVD* sono fra loro uguali, imperocchè tolto di comune il paralellogrammo *CRXD* dagli uguali paralellogrammi *TVD*, *RNA*, resterà *TVXR* uguale ad *ANXD*, e aggiunto all'uno, e all'altro di questi il trilineo *VXN*, riuscirà *RNVT* uguale ad *ANVD*.

VI. Parimente il Settore Iperbolico *CVN* è uguale a qualsivoglia de'detti quadrilateri *RNVT*, *ANVD*; poichè essendo uguali i triangoli *RCN*, *CTV*, se tolgasi di comune il triangolo *CRZ*, e vi s'aggiunga il trilineo *VZN*, ne risulterà il Settore *VCN* uguale a *RNVT*, o pure ad *ANVD*, che è il medesimo.

PROPOSIZIONE XLI.

FIG. 109. *Se l'Iperbole* NV, GH *stano fra gli Asintoti* ACE, *e* CT, *che comprendono gli angoli* ACT, TCE *a loro conseguenti, uguali a due retti, e stano quelle curve tagliate dalle rette* MH, VG *paralelle a una degli Asintoti* ACE, *saranno tagliate dall'altro Asintoto* CT *ne' punti* R, T *nella medesima ragione*.

(a) *per il Coroll. 3. della Prop. preced.*

IMperocchè (a) l'ordinate *NR*, *VT* sono come le reciproche distanze *TC*, *CR*, nella qual ragione saranno altresì l'altre ordinate *RH*, *TG*; laonde permutando sarà ancora *NR* ad *RH*, come *VT* a *TG*. Il che &c.

Ce-

COROLLARJ.

I. Quindi il quadrilatero *RNVT* al quadrilatero *HRTG* sarà sempre nella medesima ragione di *NR* ad *RH*, essendochè tutte le rette nell'uno, e nell'altro ordinate paralelle alle medesime *NR*, *RH* sono nella data ragione.

II. E congiunte al centro *C* le rette *NC*, *VC*, *GC*, *CH*, saranno parimente i settori *CNV*, *CGH* nella medesima ragione, come quelli, che sono uguali a' detti quadrilateri *RNVT*, ed *RHGT* (a).

III. Se da' punti *N*, *H* si tirino le tangenti delle Iperbole prolungate fino agli Asintoti, e sia *NH* paralella all'Asintoto *ACE*, concorreranno tali tangenti nel medesimo punto *T* dell'altro Asintoto: Imperocchè per essere *HE* uguale ad *HT*, anche *CR* sarà uguale a *RT*; e perchè *AN* è uguale a *NT*, parimente *CR* è uguale a *RT*; laonde nell'uno, e nell'altro modo risulta l'istessa *RT* uguale a *CR*; sicchè il punto *T*, dove concorrono quelle due tangenti, è il medesimo.

IV. E se dal medesimo punto *T* di un Asintoto si tirino le tangenti *THE*, *TNA* delle Iperbole, la linea *HN*, che congiunge i contatti, sarà paralella all' altro Asintoto *ACE*; imperocchè l'una, e l'altra di quelle tangenti è divisa pel mezzo ne' contatti *H*, *N*, e perciò i lati *TE*, *TA* sono tagliati in proporzione della medesima retta *HN*, che per tal ragione sarà paralella alla base *EA*.

V. Anche i triangoli *CAT*, *CTE*, descritti dentro quelli spazj Asintotici, saranno sempre nella data ragione, cioè di *NR* ad *RH*,

(a) per il Coroll. 6. della Proposiz. prec.

per essere in tal ragione le loro basi *AC*, e *CE*; E ciò accaderà eziandio ne' triangoli, che non concorrono al punto medesimo *T*, perchè i triangoli descritti in qualunque spazio Asintotico d' una istessa Iperbole dalle tangenti di essa, sono uguali (a).

(a) Per il Coroll. 4. della Proposiz. 40.

PROPOSIZIONE XLII.

FIG. 110.

Se al diametro secondo HI *conjugato al primo diametro trasverso* NQ *si facciano due Iperbole opposte* HK, IF, *delle quali il secondo diametro conjugato sia all'incontro il medesimo* NQ; *averanno queste quattro Sezioni comuni gli Asintoti. Si chiamino queste Sezioni parimente conjugate.*

Tirate le tangenti *NT*, *IT*, che concorrano in *T*, le quali saranno paralelle all'ordinate de' diametri *NQ*, *HI*, e perciò anche a i semidiametri conjugati *CI*, *CN*, congiunta la *CT*, sarà questa l'Asintoto comune all'una, e all'altra Iperbole *NV*, *IF*. Imperocchè essendo *CNTI* un paralellogrammo, il quadrato *NT* è uguale al quadrato *CI*, o pure alla quarta parte del rettangolo compreso dal lato trasverso *QN*, e dal suo lato retto. In simil guisa la tangente *IT* uguale a *CN*, che è l'altro semidiametro conjugato dell'Iperbole, contiene un quadrato uguale alla quarta parte del rettangolo contenuto dal lato trasverso *HI*, e dal lato retto, che gli corrisponde; parimente tirata all'altra Iperbole opposta *KH*, la tangente *HA* paralella all'istessa *IT*, e prolungata la tangente *TN*, che concorra con *HA* in *A*, sarà *HANC* un paralellogrammo, e l'istesse tangenti *NA*, *HA* saranno uguali a' semi-

midiametri conjugati $C\,H$; $C\,N$ ad esse opposti; onde giunta l'$A\,C$ sarà questa l'Asintoto comune a queste Iperbole (a). Dunque le rette $T\,C\,X$, $A\,C\,E$ sono gli Asintoti comuni di queste quattro Sezioni, che si chiameranno fra loro conjugate.

(a) Per la Prop. 37.

Corollari.

I. La retta NI, che congiunge i contatti, diventando il diametro del paralellogrammo $CNTI$, verrà tagliata pel mezzo dall'Asintoto CT in R, per essere CT un altro diametro dell'istesso paralellogrammo.

II. E perchè (b) NI sarà paralella all'altro Asintoto $A\,E$, anche qualsivoglia altra $V\,F$, che congiunga i contatti d'altre tangenti PF, $P\,V$ tirate da un qualche punto medesimo P dell'Asintoto comune, sarà paralella all'istessa AE, e verrà tagliata pel mezzo in Z; per essere nell'istessa ragione NR a RI, e VZ a ZF (c).

(b) per il Coroll. 4. della Proposiz. prec.

(c) Per la Prop. 42.

III. E perchè ancora CP è tagliata pel mezzo in Z, siccome la tangente PFM è tagliata pel mezzo in F (d), saranno le CF, CV tirate dal centro a' contatti paralelle alle tangenti PV, PF, e perciò saranno semidiametri conjugati di queste Iperbole; imperocchè PF è uguale a CV, che gli è paralella, e PV è uguale alla paralella CF; onde CV è ugualmente distante dall'ordinate al diametro $C\,F$, siccome CF è ugualmente distante dall'ordinate al diametro CV.

(d) Per la Prop. 38.

IV. Questi paralellogrammi $CNTI$, $CVPF$ saranno sempre uguali, siccome sono uguali i triangoli CNR, CVZ (e) che sono amendue la quarta parte de' detti paralellogrammi.

(e) per il Coroll. 2. della Propos. [illegible]

V. E qualunque paralellogrammo RLSM inscritto fra le medesime Iperbole conjugate, compreso dalle loro tangenti, tirate per i termini de' diametri conjugati, sarà uguale a qualunque altro paralellogrammo inscritto *ATEX*, compreso da altre tangenti, tirate per i termini di altri diametri conjugati: Imperocchè questi paralellogrammi saranno quadrupli degli uguali triangoli *CLR*, *CAT*, o pure degli uguali paralellogrammi *CVRF*, *CNTI*. FIG. III.

VI. In oltre congiunti i contatti, che sono a' termini de' diametri conjugati, ne risulterà il paralellogrammo *KVFG* uguali all' altro *HNIQ*; imperocchè sono questi paralellogrammi le metà degli altri *RLSM*, *ATEX* tra loro uguali; atteso, che i triangoli *CNI*, *CVF*, che sono la quarta parte de' detti paralellogrammi *KVFG*, *HNIQ*, sono la metà de' paralellogrammi *CNTI*, *CVRF*, che sono parimente la quarta parte degli altri *RLSM*, *ATEX*.

PROPOSIZIONE XLIII.

Anche nell'Ellisse, conforme nelle Iperbole conjugate, i paralellogrammi RLSM, ATEX *compresi da tangenti tirate a' termini di due diametri conjugati* GV, KF, *o* NQ, HI, *sempre saranno uguali; siccome ancora sono uguali i paralellogrammi* KVFG, HNIQ *inscritti dentro la medesima Ellisse da rette, che congiungono i termini di amendue i diametri conjugati.*

SI congiungano i due punti *V*, *I*, e pel punto *V* ordinata al diametro *NQ* la retta *VP*, che tagli la tengente *IT* in *Z*; siccome pel punto *I* ordinata al diametro *FK* la retta

IB,

IB, che concorra con la tangente *VR* in *O*, sarà certamente il paralellogrammo *CVOB* uguale all'altro *CPZI*: essendochè amendue sono doppj del triangolo *CVI* inscritto in essi; ma concorrendo il semidiametro *CF* con la tangente *IE* in *D*, e il semidiametro *CN* con la tangente *VL* in *T*, e l'una, e l'altra tangente *ID*, *VL* in *Æ*, sarà il paralellogrammo *DCTÆ* a *CFRV*, come questo medesimo a *CVOB*, mediante la comune altezza, e la continua proporzione delle loro basi *CD*, *CF*, *CB* (a): Parimente il medesimo *DCTÆ* sta a *CNTI*, come questo istesso a *CPZI*, attesa la medesima altezza di questi paralellogrammi, e la proporzione delle basi *CT*, *CN*, *CP*; dunque fra *DCTÆ*, e *CVOB*, o pure il suo uguale *CPZI*, tanto è medio proporzionale *CFRV*, quanto *CNTI*; adunque questi due sono uguali; ma sono i medesimi le quarte parti de' paralellogrammi *RLSM*, *ATEX*; dunque ancora questi sono uguali; e le loro metà sono gli altri due inscritti *KVFG*, e *HNIQ* (essendochè il triangolo *CFV* è la metà di *CFRV*, e il triangolo *CNI* è la metà di *CNTI*, i quali triangoli sono eziandio la quarta parte de' detti paralellogrammi descritti dentro l'Ellisse): dunque ancora questi paralellogrammi inscritti s' uguagliano, come s' uguagliano gli altri circoscritti. Il che &c.

(a) per il Coroll. II. della Proposiz. 2.

Corollari.

I. E' manifesto, che ... semidiametro *FC* è divisò in *B* nella stessa proporzione, che *NC* in *P*, perchè *DCTÆ* ... *CVOB* sta come egli stesso a *CPZI*, uguale a questo; e perciò la ...

ragione di DC a CB è la medesima di TC a CP; ma la prima è doppia della ragione di FC a CB, e la seconda è doppia della ragione di NC a CP; dunque ancor queste ragioni di FC a CB, e di NC a CP sono uguali; laonde ogni volta, che sono conjugati i diametri FK, VG, e parimente conjugati sono altri due NQ, IH, tirata dal termine V del diametro VG l' ordinata al diametro NQ, e dal termine I del diametro IH l' ordinata IB al diametro FK, saranno tagliati proporzionalmente i diametri NQ, FK dalle dette ordinate; imperocchè NQ doppia di NC, sarà a CP, come FK doppia di FC a CB; o pure sarà quella al rimanente PN, come questa al rimanente BF.

II. Anzi se da' termini N, I d'amendue i diametri conjugati si tirino l' ordinate Nb, IB ad altri diametri conjugati, saranno questi diametri VG, FK tagliati proporzionalmente ne' punti b, B; imperocchè sarà VC a Cb, come TC a CN (per essere l' ordinata Nb paralella alla tangente TV) e perciò come CN a CP, o pure come CF a CB; e per questo VC a Cb sarà come FC a CB, e VC alla rimanente Vb, come la medesima CF alla rimanente FB; e raddoppiati gli antecedenti, sarà VG ad Vb, come KF ad FB; siccome anche dividendo, Gb ad bV sarà come KB a BF.

III. I rettangoli dunque GbV, e KBF saranno come i quadrati CV, e CF, o pure GV, e KF, ovvero come il lato trasverso GV al suo lato retto; che vale a dire come il rettangolo GbV al quadrato Nb, o pure come il quadrato IB al rettangolo KBF; e perciò il quadrato Nb sarà uguale al rettangolo KBF; ed il quadrato IB uguaglierà il rettangolo GbV.

PRO-

PROPOSIZIONE XLIV.

I quadrati di due qualsivogliano diametri coniugati IH, NQ *sono uguali a' quadrati degli assi* KF, GV. FIG. 182.

IMperocchè tirata dal punto *I* l'ordinata *IB* a *KF*, e dal punto *N* l'ordinata *Nb* a *GV*, sarà il quadrato *CN* uguale a'quadrati *Nb*, *Cb*; e il quadrato *CI* uguale a'quadrati *CB*, *IB*; ma il quadrato *Nb* è uguale al rettangolo *KBF*, e il quadrato *IB* è uguale a *GbV* (a); dunque i due quadrati *CN*, *CI* sono uguali al rettangolo *HBF* col quadrato *CB*, e al rettangolo *GbV* col quadrato *Cb*; e perciò sono uguali a' due quadrati *CF*, e *CV*; e presi i loro quadrupli, i quadrati *NQ*, e *IH* saranno uguali a' quadrati *KF*, e *GV*. Il che &c.

(a) per il Coroll. 3. della Proposiz. prec.

COROLLARJ.

I. Quindi i quadrati di due diametri conjugati sono uguali a'quadrati d'altri qualsivogliano diametri parimente conjugati; imperocchè qualsisia coppia di questi quadrati è uguale a' quadrati dell'uno, e dell'altro asse.

II. Anche i quadrati *GF*, ed *FV* saranno uguali a'quadrati *QI*, ed *IN*; imperocchè questi sono uguali al doppio quadrato *CF*, e *CV*; e questi al doppio quadrato IC, e CN; ma i quadrati *CF*, e *CV* sono uguali, a' quadrati CI, e CN; dunque anche i quadrati GF, ed FV sono uguali a' quadrati QI, ed IN.

PRO-

PROPOSIZIONE XLV.

FIG. 113. *Ma nella Iperbole i quadrati de' diametri coniugati* IH, NQ (*se saranno disuguali*) *differiscono fra loro della medesima quantità, che due qualsivoglia quadrati d' altri diametri conjugati* KF, GV.

IMperocchè tirate da' punti *N*, ed *V* fra gli Asintoti le tangenti *ANT*, *LVR*, che saranno uguali agli stessi diametri secondarj *IH*, *KF*, essendochè *NA* sarà uguale al semidiametro *CH*, e *VL* al semidiametro *CK*; e tirate all'Asintoto *CA* le perpendicolari *NM*, *TB*, ed *VE*, *RD*, è manifesto, che sarà *AM* uguale ad *MB*, siccome *AN* è uguale a *NT*: onde la differenza de' quadrati *CN*, *AM*, che è la medesima di quella de' quadrati *CM*, *MA* (perchè il quadrato *CN* è uguale a' quadrati *CM*, ed *MN*; e il quadrato *AN* è uguale a' quadrati *AM*, *MN*; onde tolto il quadrato comune *MN*, la differenza di quei quadrati rimane l'istessa, che quella de' quadrati *CM* ed *AM*) sarà l' istessa, che la differenza de' quadrati *CM*, ed *MB* che è la medesima, che il rettangolo *ACB*. Similmente la differenza de' quadrati *CV*, ed *VL* sarà la medesima, che la differenza del quadrato *EC* dal quadrato *EL*, o dal suo uguale *ED*, quale sarà il rettangolo *LCD*. Ma i rettangoli *ABC* *LCD* sono uguali, essendochè *CB* a *CD* sta come *CT* a *CR*, e perciò come *LC* a *CA* (attesa l'uguaglianza de' triangoli *CLR*, *CAT* (a), che debbono avere intorno l' angolo comune C i lati reciprocamente proporzionali (b); dunque la differenza de' quadrati *NC*, *NA*, o pure *CH*

(a) per il Coroll. 4. della Prop. 40.

(b) per la Propos. 15.

è la

è la medesima di quella de' quadrati CP, VL o pure CK; onde presi ancora i loro quadrupli la differenza de' quadrati QN, HI sarà la medesima della differenza de' quadrati VG, KF. Il che dovea dimostrarsi &c.

del 6. degli Elementi.

PROPOSIZIONE XLVI.

FIG. 114.

Prese nell'Asintoto dell'Iperbole le distanze dal centro CL, CO, CA *continuamente proporzionali, e quindi tirate le linee* LP, OK, AI *parallele all'altro Asintoto, che taglino l'Iperbole ne' punti* P, K, I, *saranno gli spazj Iperbolici* LPKO OKIA *da esse intercetti fra loro uguali.*

TErminati i parallellogrammi *CLPR*, *COKS*, *CAIM*, e prolungate le rette *AI*, *RP*, che concorrono in *T*, i parallellogrammi, che quindi risultano *CLEM*, *COKS*, *CATR* saranno simili; Imperocchè come *AC* a *CO*, così *OK* ad *AI* (a); ma *AC* a *CO* sta come *CO* a *CL*; dunque *CO* a *CL* sta come *OK* ad *AI*, ovvero come *CS* a *CM*, dunque *CLEM*, e *COKS* sono simili. Parimente sta *LP* a *OK*, o pure *CR* a *CS* come *OC* a *CL*, cioè come *CA* a *CO*; dunque eziandio *CATR* è simile al medesimo *COKS*, e perciò anche all' altro *CLEM*; per la qual cosa il diametro *CT* passa per gli angoli rimanenti *E*, *K*; e congiunta la *PI*, sarà questi anche il diametro del paralellogramo *PEIT*, tagliato per mezzo dall' istessa *CET* in X: laonde sarà *PI* l' ordinata dell' Iperbole al diametro CKX, che passa per il vertice K del segmento Iperbolico *PKI*. Dunque tolte da' triangoli uguali *CPX*, *CXI* le mezze Iperbole uguali PKX, IKX, rimarranno uguali i settori CPK, CI

(a) Per il Coroll. 3. della Pr. 40.

(a) per il Coroll. 6. della Prop. 40.

ma sono uguali ad essi gli spazj Iperbolici *LPKO*, *OKIA* (a); dunque ancora questi spazj risultano uguali. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 115.

I. Parimente se si prenda nell' Asintoto *CA* a *CO*, come qualunque altra *CD* a *CL*, tirate dipoi le paralelle all' altro Asintoto *AI*, *OK*, e *DQ*, *LP*, ne risulteranno gli spazj Iperbolici *AIKO*, e *QDLP* uguali; Imperocchè presa *CN* media fra l' estremo *CA*, *CL*, e perciò fra le medie ancora *CO*, *CD*, e ordinata la *NV*, sarà lo spazio *IANV* uguale a *VNLP*; siccome *KONV* uguale a *VNDQ*; dunque anche il rimanente *AIKO* sarà uguale al rimanente *QDLP*.

II. E se si prendano quante distanze si vogliano *CA*, *CO*, *CN*, *CD*, *CL* continuamente proporzionali, ordinate le loro corrispondenti, risulteranno uguali gli spazj Iperbolici intercetti da esse *IAOK*, *KONV*, *VNDQ*, *QDLP* &c.

III. Poichè, se la ragione di *LC* a *CN* sia duplicata della ragione di *DC* a *CN*, sarà lo spazio *VNLP* doppia di *VNDQ*; e se la prima ragione fosse triplicata della seconda, sarebbe il primo spazio triplo del secondo; imperocchè conterrebbe tanti spazj uguali di quante ragioni uguali fosse composta la sua ragione: quindi qualunque spazio *KOLP* ad un altro spazio *QDLP* sta come la ragione di *LC* a *CO* alla ragione di *LC* a *CD*, secondo la quantità logaritmica delle proporzioni.

IV. Ciò, che s' è detto rispetto agli spazj, vale ancora rispetto ai Settori Iperbolici *ICK*, *QCP*, *VCQ* &c. che sono sempre uguali a' loro corrispondenti spazj adiacenti all' Asintoto.

V.

V. Finalmente è manifesto, che tutto lo spazio frapposto tra la curva Iperbolica, e i suoi Asintoti, ed infinitamente prolungato, è d'infinita grandezza; perciocchè potendo le ragioni di *CA*, *CO*, *CN* ec. continuarsi in infinito, corrisponderanno a queste infinite ragioni infiniti spazj al primo *IAOK* uguali, compresi nel medesimo spazio Asintotico.

PROPOSIZIONE XLVII.

Se si descriva con il lato retto NR *uguale al trasverso* NQ *dell'Iperbole equilatera* NM, *la parabola* NB *al medesimo asse, tirata qualsivoglia retta* BD, *paralella all'asse, che concorra con l'asse secondario* CE *dell'Iperbole in* D, *e con l'Iperbole in* M, *sarà lo spazio Iperbolico* CNMD *uguale al rettangolo del semiasse trasverso* CN *nella porzione* NB *della curva parabolica, intercetta fra il vertice, e la medesima retta* BD.

TAV. XI. FIG. 116.

Imperocchè ordinata la *MK* all'Iperbole, e la *BA* alla parabola, di cui la tangente sia *BG*, alla quale si tiri *BP* perpendicolare, congiunta *DN*, sarà all'istessa *BP* uguale, e peralella; Perciocchè la subnormale *AP* è uguale a *NC*, dovendo essere la metà del lato retto (a), e l'*AB* è uguale alla *CD*, onde anche la base *BP* del triangolo rettangolo *BAP* è uguale alla base *DN* dell'altro triangolo rettangolo *DCN*; ma l'istessa *DN* è uguale alla DM; avvegnachè il rettangolo *QKN* è uguale al quadrato *KM* (siccome il diametro trasverso QN è uguale al parametro *NR*) o pure al quadrato *CD*; e aggiunto il quadrato *CK*, il quadrato *CK*, o pur *DM* sarà uguale al quadrato DN = per

(a) per il Coroll. 19. della Proposiz. 6.

per la qual cosa anche *B P* uguaglierà *D M*. E preso nella tangente *BG* il punto *I* infinitamente prossimo al punto *B*, e tirata *HIE* paralella a *B D*, poichè per la somiglianza de' triangoli *IHB*, *BAP* sta *IB* a *BH*, o pure a *DE*, come *B P* a *P A*, o pure come *DM* a *CN*, sarà il rettangolo *E DM* uguale a *C N* moltiplicata in *I B*, la quale per essere infinitamente prossima è la medesima, che la porzione infinitamente piccola della curva parabolica, siccome il rettangolo *E D M O* a cagione della retta *O E* infinitamente prossima a *DM*, è quasi il medesimo dello spazio Iperbolico *E D M F*, dal quale differisce per lo spazio *F O M* infinite volte minore. E perchè ciò sempre accade, è manifesto, che il rettangolo di *CN* in tutta la curva parabolica *N B* è uguale allo spazio Iperbolico corrispondente *CDMN*. Il che &c.

C O R O L L A R I O.

Dall'essersi dimostrata *DN* uguale a *DM* se ne deduce una facil maniera di descrivere l'Iperbole equilatera, cioè inclinando dall'angolo retto *N C D* rette d'infinito numero *N E*, *N D*, e dipoi tirando a *C N* le paralelle *EF*, *DM*, che siano uguali alle dette inclinate *N E*, *N D*; Imperocchè i punti *N*, *F*, *M* saranno nella curva Iperbolica equilatera.

PRO-

PROPOSIZIONE XLVIII.

Se col medesimo asse trasverso NQ, *e un altro lato retto* NG *si descriva l' Iperbole* NABK, *presa la media proporzionale* NT *fra questo lato retto, e il trasverso, o pure retto* NR *dell' Iperbole equilatera* NFM, *sarà lo spazio* NBK *ad* NMK, *come* NG *a* NT. FIG. 127 e 118.

Tirisi qualsivoglia altra ordinata *AH*, che tagli l'Iperbole equilatera in *F*. Sarà il quadrato *BK* al rettangolo *QKN*, o pure al quadrato *KM* dell' Iperbole equilatera, che quel rettangolo uguaglia, come *GN* ad *NQ* ovvero ad *NR*; ma come *GN* a *NR*, così il quadrato *GN* al quadrato di *NT* media proporzionale fra esse, dunque sarà *BK* a *MK* come *GN* a *NT*. Similmente sarà *AH* ad *HF*, come *GN* a *NT*. Dunque tutte le linee dello spazio Iperbolico *NBK* a tutte le linee dell' altro *NMK*, e perciò ancor lo spazio della descritta Iperbole a quello dell' Iperbole equilatera, sta come il lato retto *GN* della prima ad *NT* media proporzionale, tra il medesimo *GN*, e il trasverso *NQ*, o pur retto *NR* dell' altra. Il che &c.

PROPOSIZIONE XLIX.

Lo spazio della Parabola CAK *è uguale a due terzi del parallelogrammo* IHCK *ad essa circoscritto.* FIG. 119.

AL diametro *AE* si conduca l' ordinata *DB*, e per il punto *B* si tira la linea *FBL* paral-

ralella al diametro, congiungasi l' AC, che taglierà DB in G, ed LF in M. Dalla rivoluzione del paralellogrammo $AHCE$, e del triangolo ACH intorno ad AH, ne nascerà un Cilindro triplo del Cono; ed essendo il cerchio del raggio LF, o pure HC al cerchio del raggio ML, come il quadrato di quello al quadrato di questo, o pure come il quadrato AH al quadrato AL, cioè come il quadrato EC al quadrato DB; che vale a dire come la retta EA all' ascissa AD, o pure come FL ad LB; Perciò tutti gli uguali cerchj di quel Cilindro saranno a tutti i cerchj del Cono inscritto, come tutte le uguali linee del paralellogrammo, a tutte le linee del trilineo parabolico $ABCH$; Laonde siccome il Cilindro è triplo del Cono, così il paralellogrammo $AHCE$ è triplo del trilineo $ABCH$; e perciò il rimanente spazio parabolico $ABCE$ è uguale a due terze parti del detto paralellogrammo $AECH$, e raddoppiando l' uno e l' altro spazio, l' intera Parabola CAK è uguale a due terzi del paralellogrammo circoscritto $IHCK$. Il che &c.

Corollarj.

I. Quindi è manifesto, che la Parabola è sesquiterza del triangolo inscritto; Imperocchè essendo la Parabola al paralellogrammo come 2 a 3, e il paralellogrammo al triangolo come 2 ad 1, sarà la Parabola al triangolo in ragione composta di 2 a 3, e di 2 ad 1, e perciò come 4 a 3.

II. La Parabola $ABCE$ alla parte ABD tagliata dall' ordinata BD, sta come il cubo EC al cubo DB; Imperocchè per essere anche ABD ugua-

uguali a due terzi del parallelogrammo *ADBL*, sta *ABCE* ad *ABD*, come *AECH* ad *ADBL*, cioè in ragione composta della ragione delle basi *EC*, *DB*, e della ragione dell' altezze *EA*, *DA*, che è duplicata di quella, per essere come il quadrato *EC* al quadrato *DB*; Laonde saranno questi spazj in ragione triplicata dell' ordinate *EC*, *DB*, e però come i Cubi delle medesime.

PROPOSIZIONE L.

Il cerchio del diametro AB *è uguale al triangolo rettangolo* CAB *la di cui altezza sia il raggio* CA, *e la base* AB *uguagli la circonferenza* PA. FIG. 120.

IMperocchè tirata per qualunque punto *D* del raggio la concentrica periferia *DF*, e nel triangolo la retta *DE* paralella alla base, sarà *AB* a *DE*, come la periferìa *PA* alla periferìa *FD*, essendo tanto l' une, che l' altre come *AC* a *CD*: per la qual cosa siccome *AB* è uguale alla periferìa *PA*, così *DE* è uguale all' altra periferìa *FD*, e questo accaderà per tutto; dunque tutte le linee del triangolo *CAB* sono uguali a tutte le periferìe concentriche del detto cerchio. Dunque il triangolo è uguale al cerchio. Il che &c.

COROLLARIO.

Quindi il medesimo cerchio sarà uguale al rettangolo del raggio nella mezza circonferenza, o pure di tutta la circonferenza nella metà del raggio, o sia quarta parte del diametro: laonde

H essen-

essendo per il computo d' Archimede la circonferenza al diametro come quasi 22 a 7, sarà il cerchio al quadrato del diametro 38 e un mezzo a 49. o pure come 77 a 98, cioè come 11 a 14.

PROPOSIZIONE LI.

FIG. 121. *L' Ellisse* NEQ *sta al cerchio descritto sull' asse maggiore* NQ, *come il minore asse al maggiore*,

ORdinata per il centro la *CE*, che è il semiasse minore dell' Ellisse, e prolungata fino al cerchio in *B*, dipoi tirata qualunque altra ordinata *KM*, che concorra col cerchio in *D*; come sta il rettangolo *QKN*, a *QCN*, così starà il quadrato *MK* al quadrato *EC*, e il quadrato *DK*, che è uguale al primo rettangolo, al quadrato *BC* uguale all' altro *QCN*. Dunque tutte le linee dell' Ellisse a tutte le linee del cerchio sono come *EC* a *CB*; e perciò lo spazio di tutta l' Ellisse al Cerchio intero sta come *EC* semiasse minore al raggio *CB*, o pure *CQ* semiasse maggiore, e perciò come l' asse minore al maggiore. Il che &c.

COROLLARIO.

Tirate dal centro le rette *CM*, *CD*, sarà parimente il settore Ellittico *CMQ* al settore circolare *CQ* nella medesima ragione del minore asse al maggiore; Imperocchè il segmento *MKQ* al segmento *DKQ*, e il triangolo *CMK* al triangolo *CDK*, sono come *MK* a *DK*, e perciò come *EC* a *BC*, ovvero *CQ*.

PRO-

PROPOSIZIONE LII.

Se qualunque Sezione Conica A E B *rivolgasi intorno al suo asse* E D, *le tangenti della quale* A F, B H *tirate da' termini della base converranno con la tangente verticale* EF *ne' punti* F, H, *congiunte al punto* D *della metà della base le rette* F D, H D, *sarà il solido Conoidale generato dalla rivoluzione di* D E B, *uguale al solido, prodotto dalla rivoluzione, che fa il triangolo* DHB *intorno al medesimo asse: Il solido poi generato dalla rivoluzione del trinileo* E N B H *intorno all' istesso asse è uguale al cono, prodotto dalla rivoluzione del triangolo* E D H. FIG. 123.

IMperocchè tirata ovunque si voglia la *LK* paralella alla base, ed alla tangente verticale, che tagli l'asse in *I*, le tangenti in *L*, *K*, la curva in *M*, *N*, le rette *FD*, *HD* in *O*, *P*, sarà il rettangolo *MKN* al quadrato *KB*, come il quadrato *EH* al quadrato *HB* (a) e permutando, il rettangolo *MKN* al quadrato *EH* sarà come il quadrato *KB* al quadrato *HB*, o pure come il quadrato *DI* al quadrato *DE*, ovvero come il quadrato *IP* al quadrato *EH*; Laonde il quadrato *IP* è uguale al rettangolo *MKN*, che vale a dire alla differenza de' quadrati *IK*, *IN*; Per la qual cosa anche il cerchio descritto col raggio *IP* sarà uguale alla differenza de' cerchj descritti da' raggi IK, IN, o pure all' armilla circolare, che vien generata dalla retta *NK* nella rivoluzione del trilineo *ENBH* intorno all' asse ED; e questo accaderà sempre; laonde il cono generato dal triangolo *EDH* nel rivol[illegible] intorno all' asse *ED*, le Sezioni del [illegible] sono i cerchi de' raggi [illegible]

(a) per l. Prop. 16.

raggi *IP*, uguaglierà il solido prodotto dalla rivoluzione del trilineo *ENBH* intorno al medesimo asse, le Sezioni del quale sono l'armille descritte dalle rette *N*, *K*; Ma questo solido prodotto dal trilineo *ENBH* insieme col solido Conoidale generato dalla rivoluzione della Sezione Conica *ENBD* intorno *ED*, è uguale a' solidi descritti da' triangoli *EDH*, *DHB* nel rivolgersi intorno al medesimo asse; dunque siccome il solido, che nasce dal trilineo *ENBH* è uguale al Cono del triangolo *EDH*, così anche il rimanente Solido Conoidale prodotto dalla rivoluzione di *ENBD* è uguale al rimanente solido generato dalla rivoluzione del triangolo *DHB* intorno al medesimo asse. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Prolungate le tangenti laterali *AF*, *BH* per modo che concorrano con l'asse in *G*; e dalla base tagliata la *DS*, il quadrato della quale uguagli la differenza del quadrato *AD* dal quadrato *FE*, congiunta la *GS*, sarà la Conoide, che dalla rivoluzione di *ENBD* intorno all'asse *ED* producesi uguale al Cono prodotto dal triangolo *SGD* nel rivolgersi intorno alla *GD*; Imperocchè il Cono generato dalla rivoluzione del triangolo *ADG* è la terza parte del prodotto, che risulta dal cerchio del raggio *DA* in *DG*, e il Cono prodotto dal triangolo *FEG* insieme col Cono prodotto dal triangolo *FED* è la terza parte del prodotto, che risulta dal cerchio del raggio *EF* moltiplicato in *EG* più *ED*, cioè in *DG* medesima; Dunque l'eccesso del Cono, che risulta da *ADG* so-

sopra i Coni risultanti da *FEG*, ed *FED*, cioè il solido prodotto dalla rivoluzione del triangolo *AFD*, o pure *DHB* intorno *ED*, che vale a dire la Conoide generata dalla rivoluzione di *ENDB*, uguaglierà la terza parte del prodotto, che risulta dall' eccesso del cerchio formato dal raggio *DA*, sopra il cerchio del raggio *EF* moltiplicato nella medesima altezza *DG*. Ma essendo il quadrato *DS* la differenza de' quadrati *DA*, *EF*, anche il cerchio del raggio *DS* è l' eccesso del cerchio *DA* sopra il cerchio *EF*; e perciò il Cono generato dal triangolo *SGD* è uguale all' istessa Conoide.

II. Se la Curva *AENB* è una parabola, la Conoide procedente da essa sarà uguale al triplo del solido generato dalla rivoluzione del triangolo *CFD* intorno alla medesima *GD*; Imperocchè per essere la sottangente *DG* doppia di *GE*, l' *AD* è doppia di *FE*, e il quadrato di quella quadruplo del quadrato di questa; Laonde il cerchio del raggio *DS* sarà triplo del cerchio descritto col raggio *EF*, e perciò il Cono prodotto dal triangolo *SGD*, cioè l' istessa Conoide, sarà tre volte maggiore del solido, che risulta dalla revoluzione di *GFD*, che uguaglia il Cono fatto dal cerchio del raggio *EF* nell' altezza medesima *GD*.

III. Qualunque Conoide è al Cono inscritto, che dal triangolo *DEB* nel rivolgersi intorno all' asse *ED* vien generato, come la somma della base *DB*, e della verticale tangente *EH*, all' istessa *DB*: Imperocchè col raggio *DB* descritto il cerchio *BVA*, e tirata *HV* paralella all' asse, che tagli la [illegible] in *T*, il cerchio in *V*, siccome alla congiugnente *DV* tirata la perpendi-

FIG. 123.

dicolare TI, sarà il quadrato TV l'eccesso del quadrato DV sopra il quadrato DT, o pure la differenza de' quadrati DB, EH: Per tanto essendo la Conoide (a) uguale al Cono, di cui la base è il cerchio del raggio TV, e l'altezza è DG, sarà al Cono inscritto del raggio DB, e dell'altezza DE in ragione composta del quadrato TV al quadrato DB, o DV, cioè di IV a VD, e di GD a DE, che è la medesima di GB, e BH, o DB, o pure di DV a TB; Dunque la Conoide al Cono inscritto sta come IV a BT; ma in questa ragione è ancora AT a DV (perciocchè i rettangoli IVD, ATB si uguagliano, per essere uguali amendue al quadrato TV.) Dunque la ragione della Conoide al Cono inscritto è l'istessa, che la ragione di AT a DV, cioè di DB più EH a DB.

(a) per il Coroll. 1.

IV. Onde ancor la Conoide al Cono inscritto sarà come DG più GE all'istessa DG, cioè, prolungato l'asse al punto R per modo, che GR sia uguale a GE, sarà la ragione della Conoide al Cono inscritto la medesima, che di DR a DG.

V. *Quindi la Conoide Parabolica* sarà sesquialtera *del Cono inscritto*; perchè DR sarà tripla di DE, della quale è doppia DG, onde DR a DG sta come 3 a 2. E perchè il Cilindro circoscritto alla Conoide sarebbe triplo del Cono inscritto, sarà questo duplo della Conoide parabolica dentro di se descritta; perciocchè essendo il Cilindro al Cono, come 6 a 2, e il Cono alla Conoide come 2 a 3, sarà il Cilindro alla Conoide come 6 a 3, cioè duplo.

FIG. 124. VI. Se la Curva AEB sia un semicerchio, o una

o una ſemielliſſe, poichè le tangenti laterali *AF*, *BH* tirate da' termini dell' altro aſſe *AB* ſono paralelle all' aſſe *ED*, ſarà la tangente *EH* uguale a *DB*; Dunque *DB* più *EH* è doppia di *DB*, e perciò l' Emisfero, ovvero l' Emisferoide Ellittica ſarà doppio dell' inſcritto Cono; Il Cilindro poi circoſcritto all' Emisfero, o all' Emisferoide, ſarà loro ſeſquialtero; Imperocchè il cilindro al Cono ſta come 3 ad 1, e il Cono all' Emisfero, o all' Emisferoide come 1 a 2. Dunque il cilindro al ſolido dell' Emisfero, e della Emisferoide ſarà come 3 a 2. Il medeſimo può dirſi de' cilindri circoſcritti a tutta la Sfera o alla Sferoide.

PROPOSIZIONE LIII.

Se lo ſpazio intercetto fra l' Iperbole BH, *e l' Aſintoto* CI *ſi rivolga intorno all' aſſe* BE, *il ſolido, che quindi ne riſulta, ſarà uguale a un cilindro, ugualmente alto, col cerchio del raggio* BC *per baſe.* FIG. 125.

POichè il rettangolo *IHG*, cioè la differenza de' quadrati *EI*, *HE* è uguale al quadrato della tangente *BC* (a), o pure della retta *EK*, anche la differenza de' cerchj deſcritti da' raggi *EI*, *EH*, cioè l' armilla circolare generata dalla retta *HI* nella revoluzione dello ſpazio Aſintotico *BHIC* intorno all' aſſe *BE* ſarà uguale al cerchio del raggio *EK*, deſcritto nel Cilindro dalla revoluzione del rettangolo *BCKE*; e ciò ſempre accade; dunque tutte l' armille circolari di quel ſolido ſono uguali a tutti i Cerchi di queſto Cilindro, e perciò quel ſolido è uguale a queſto Cilindro.

(a) per il Coroll. 1. della Propoſiz. 38.

Co-

COROLLARJ.

I. Quindi la Conoide Iperbolica prodotta dalla Sezione *BHE*, mentre gira intorno all'asse *BE*, è uguale all'anello, che nasce dalla revoluzione del triangolo *CKI* intorno al medesimo asse; Imperocchè questo anello col cilindro, che risulta dal rettangolo *BCKE* uguaglia la somma della Conoide *BHE*, e del solido generato dallo spazio Asintotico *BHIC*; Laonde per esser questo solido uguale al detto Cilindro, anche la Conoide Iperbolica uguaglierà il detto anello.

FIG. 126.

II. Similmente se lo spazio Asintotico *ABCD* rivolgasi intorno al secondo asse *AF*, il solido, che quindi ne nasce, sarà uguale al cilindro prodotto dalla revoluzione del rettangolo *ABEF* intorno al medesimo asse; Perciocchè il rettangolo *CDH* è uguale al quadrato *AB*, o pure *FE* (a): onde la differenza de' cerchj fatti da' raggi *FC*, *FD*, cioè l'armilla circolare generata nel detto solido dalla retta *DC*, uguaglia il cerchio del raggio *FE* in quel Cilindro; e ciò sempre accade; laonde tutto il solido sarà uguale a tutto il Cilindro di uguale altezza.

(a) Per la Prop. 39.

III. L'anello poi risultante dall' Iperbolico trilineo *BEC*, che si rivolge intorno ad *AF*, sarà uguale al Cono generato dalla revoluzione del triangolo *ADF* intorno al medesimo asse; Imperocchè quell' anello col Cilindro, e questo Cono col solido prodotto dalla revoluzione dello spazio Asintotico, compone la Cilindroide Iperbolica, che nasce dal rivolgersi dello spazio *ABCF* intorno al medesimo asse *AF*.

PRO-

PROPOSIZIONE LIV.

Inscritto il rettangolo DEAG *fra l'Iperbole equilatera* DC, *e i suoi Asintoti* EA, AB, *se tutto lo spazio Asintotico* EDCKBA *rivolgasi intorno* AB *d'infinita lunghezza, ne verrà un solido doppio del Cilindro descritto dal detto rettangolo nel rivolgersi intorno a* GA.

FIG. 127.

Tirisi qualunque retta *CI*, che sia paralella all'Asintoto; e seghi i lati del rettangolo in *F*, *I*, e il diametro *EG* dal medesimo in *H*, sarà *CI* a *DE*, come *EA* ad *AI* (a), o pure come la periferìa descritta col raggio *AE* alla periferìa descritta col raggio *AI*; Dunque il rettangolo dell'altezza *CI* nella periferìa circolare del raggio *AI*, che uguaglia la superficie cilindrica descritta dalla linea *CI* nel rivolgersi intorno *AB* è uguale al rettangolo dell'altezza *DE* nella periferìa del raggio *AE*, che sarebbe la superficie cilindrica prodotta dalla rivoluzione della retta *DE* intorno *AB*: Laonde la superficie cilindrica generata dalla linea *CI*, alla superficie cilindrica generata dalla *FI*, sta come la cilindrica superficie prodotta da *DE* all'istessa prodotta da *FI*; cioè come la circonferenza del raggio *EA* alla circonferenza del raggio *AI*; che vale a dire come *EA* ad *AI*, o pure come *DG* a *GF*, ovvero come *DE*, o sia *FI* a *FH*. e ciò per tutto accaderà. Dunque tutte le superficie Cilindriche, che compongono il solido Iperbolico, resultante dalla rivoluzione del detto spazio Asintotale, a tutte le cilindriche superficie, che costituiscono il Cilindro generato dal rettangolo DEAG.

(a) per il Coroll. 3. della Proposiz. 40.

DEAG, sono come tutte le linee del medesimo rettangolo alle linee corrispondenti ad esse nel triangolo *DEG*. Essendo pertanto uguali tutte le superficie cilindriche del solido Iperbolico, e uguali altresì le linee ordinate nel parallellogrammo rettangolo, sarà l' istesso solido Iperbolico al detto cilindro come il rettangolo al triangolo inscritto, cioè in doppia ragione, onde è manifesto l'assunto.

COROLLARJ.

I. Quindi dividendo il solido Iperbolico esistente sopra il Cilindro prodotto dal rettangolo *GDEA*, cioè descritto dallo spazio *DCKBG*, sarà uguale al cilindro ad esso sottoposto; E similmente l'altra porzione del detto solido prodotta dalla revoluzione del solo spazio *cCKBb*, sarà uguale al Cilindro descritto dal rettangolo *cLAb*, su cui insiste.

II. E questi solidi generati dalle revoluzioni di *DCKBG*, e di *cCKBb*, saranno come i raggi *DG*, *cb* delle loro basi circolari; Imperocchè in tal ragione sono i Cilindri sottoposti, a' quali detti solidi sono uguali, come quelli, che sono in ragion composta dell' altezze *ED*, *Lc* (che è la medesima reciprocamente di *LA* ad *AE*, o pure del rettangolo *LAE* al quadrato *AE*) e del quadrato *AE* al quadrato *AL*, e perciò sono come *LAE* al quadrato *AL*, cioè come *AE* ad *AL*, o pure come *DG* a *cb*

FIG. 128. III. Perciò se sarà divisa *AE* in alquante parti uguali *AI*, *IL*, *LH*, *HE* &c. tirate le parallelle all' Asintoto *IC*, *Lc*, *HM*, *ED*, e ordinate all' Asintoto le *CB*, *cb*, *MN*, *DG*, dal-

dalla revoluzione di questo spazio Asintotico intorno ad AB, ne risulteranno le parti descritte dalle porzioni $DMNG$, $McbN$, $cCBb$, e dall'ultima CKB d'infinita lunghezza fra loro uguali; Imperocchè essendo quelli interi solidi, come i raggi delle basi, le loro differenze sono come le differenze di tali raggi, che si sono poste uguali.

IV. Che se tutto lo spazio compreso dall'intera Iperbole, e dall'uno, e dall'altro Asintoto infinito, si rivolga intorno ad uno degli Asintoti, cioè $AOQPDCK$ intorno ad AB, sarà questo di grandezza infinita, attesochè nell'Asintoto infinito AOQ infinite parti uguali all'istesse AI, IL &c. possono disporsi, alle quali altrettante infinite porzioni di questo solido corrisponderanno fra loro uguali.

APPENDICE.

PROPOSIZIONE I.

Sia la Parabola A, B, C *toccata ne' punti* A, C, *dalle rette* AG, CG, *delle quali il concorso sia* G. *Dico che tirata qualunque altra tangente* HBF, *la quale seghi le rette* AG, CG *in* H, *e in* F, *sarà* CF *a* GF *come* GH *ad* AH.

TAV. XII FIG. 129.

Si congiungano i punti *A*, *B*, *C*, colle rette *AC*, *AB*, *CB*, e segata per mezzo *AC* in *D*, si tiri *GD*, alla quale per i punti *F*. *H*, *B*, si tirino paralelle *HI*, *BK*, *FE*. Ciò posto essendosi dal concorso *G* delle tangenti *AG*, *CG*, tirata *GD*, che sega per mezzo l' ordinata *AC* in *D*, sarà la *GD* uno dei diametri della Parabola, e conseguentemente la *FE*, *BK* paralelle a *GD* saranno diametri anch' esse, e segheranno per mezzo le respettive loro ordinate *BC*, *BA*. E perchè *BK* è paralella a *FE*, *HI*, saranno anche le *KC*, *KA* tagliate qer mezzo in *E*, *I*. Essendo dunque *AI* la metà di *AK*, ed *EC* la metà di *KC*, saranno le *AI*, *EC*, prese insieme la metà di *AC*, e però eguali a *DC*, cioè eguali ad *EC*, insieme con *DE*, e tolta la comune *EC*, sarà *AI* eguale a *DE*. Sarà dunque *CD* a *DE*, come C*D*, ovvero *DA* ad *AI*, ma come *CD* a *DE*, così a causa delle paralelle *GD*, *FE*, sta C*G* a *GF*, e per una simil ragione, come *DA* ad *AI*, così sta *GA* ad *AH*, onde starà *CG* a *GF*, come *GA* ad *AH*, e dividendo *CF* a *FG*, come *GH* ad *HA*, che è ciò, che doveva dimostrarsi.

Co-

COROLLARJ.

ue tangenti GA, GC saranno egua-
caso la retta GD diventerebbe l'as-
one, la somma delle due GH, GF,
guale alla medesima quantità, cioè
GA, ovvero GC. Imperocchè es-
trato, che CG sta a GF, come GA
permutando CG a GA, come GF
rò uguagliandosi le tangenti CG,
ancora eguali le GF, AH, e ag-
iune HG, sarà AG eguale ad HG
F.

e GC, GA non fossero eguali, ti- FIG. 139.
nto F, nel quale la GC resta se-
ngente HF, la FL paralella alla
he seghi la GA in L, sarà la GL
H, e la somma delle GL, GH,
ale alla tangente GA. Perchè es-
similitudine dei triangoli GF a GL,
A, cioè come GF ad AH, sarà
AH; e la somma di GL, GH
omma di GH, HA, cioè alla

tta dal punto O vertice della Se-
ente MON, la quale, per la nota
a Parabola, taglierà per mezzo la
in M, saranno le rette LM, MH
i, e ciò per essere la somma delle
le al doppio di GM, onde GM
ritmetica fra le due GH, GL;
enza uguali le differenze HM,

IV. Quindi è chiaro, che qualsivoglia tan-
gen-

gente, come *HF* intercetta fra le tangenti *GC*, *GA*, sarà sempre divisa per mezzo in *I* dalla tangente *MON*, paralella alla retta *AC*, che congiunge i punti del contatto delle due tangenti *GC*, *GA*.

FIG. 129. V. La medesima tangente *HF*, si divide dal punto del contatto *B* in modo, che la *porzione HB* alla *BF* stia sempre nella stessa ragione della *GL* alla *GH*. Imperocchè la *HB* alla *BF*, a causa delle paralelle, stà come *KI* a *KE*, cioè come *DE* a *DI*, cioè in ragione composta della ragione di *DE* a *DC*, e della ragione di *DC*, ovvero *DA* a *DI*, ma la prima è la medesima, che la ragione di *GF* a *GC*, ovvero di *GL* a *GA*, e la seconda è parimente l' istessa con la ragione di *GA* a *GH*, onde la ragione di *HB* a *BF* sarà composta delle ragioni di *GL* a *GA*, e di *GA* a *GH*, delle quali è parimente composta la ragione di *GL* a *GH*, e però *HB* a *BF* sarà come *GL*, ovvero *AH* a *GH*.

FIG. 131. VI. La proprietà delle tangenti della Parabola dimostrata nella precedente Proposizione, somministra un modo assai facile, e spedito di descrivere la medesima curva, il quale può essere di qualche uso per la pratica dell' Architettura. Per esempio, se fosse data la largezza *AL*, e l' altezza *AH* d' una Volta, o arco di ponte da costruirsi, presa la *AO* metà di *AL*, si faccia della *AO*, e della *AH* il rettangolo *AOH*, e divisa la base *AO* in qualsivoglia numero di parti eguali, si divida parimente in egual numero di parti l' altezza *AH*, le quali potranno contrassegnarsi con numeri, principiando da *O* verso *A*, e da *A* verso *H*; quindi

presi

presi in ambedue le rette *OA*, *AH* i numeri corrispondenti, *v. gr.* 4, 4, si tiri la retta 4, 4 la quale sarà tangente d'una Parabola iscritta nel rettangolo *HAO*, e toccata dai lati *HA*, *OA*, ne i punti *H*, ed *O*, onde moltiplicando il numero delle tangenti si averà finalmente la centina d'un arco parabolico, il quale per la sua sveltezza, e ampiezza di luce riuscirà assai vago, e opportuno per il fine proposto.

PROPOSIZIONE II.

Se in un cerchio C, F, S, *tirate dai termini* FIG. 131. *del diametro* CS, *le tangenti* CM, SA *eguali dai punti* M, A, *a qualsivoglia punto della circonferenza* F, *si condurranno le rette* MF, AF, *le quali seghino il diametro* CS, *in* O, *e in* V, *dico, che la ragione del rettangolo delle due porzioni* CO, SV *al quadrato della porzione di mezzo* OV *sarà costante, cioè la stessa, che la ragione del quadrato della perpendicolare* CM *al quadrato del diametro* CS.

Congiunta *MA*, la quale sarà eguale, e paralella al diametro *CS*, dal punto *F* si tiri la *FZN* perpendicolare ad ambedue, con le quali concorra nei punti *Z*, *N*. Ciò posto per la similitudine dei triangoli, sarà il quadrato di *MA* al quadrato di *OV*, come il quadrato di *MF* al quadrato di *OF*, cioè come il quadrato di *FN* al quadrato di *FZ*. Nell'istessa maniera per essere *FM* a *MO*, ovvero *FN* a *ZN*, come *ZC* a *CO*, e parimente *FA* ad *AV*, ovvero *FN* a *ZN*, come *ZS* a *SV*, sarà componendo le ragioni di quadra-

drato di FN al quadrato di ZN, come il rettangolo di CZ in ZS, ovvero il quadrato di FZ, al rettangolo di CO in VS, e permutando il quadrato di FN al quadrato di FZ, come il quadrato di ZN, ovvero di CM al rettangolo di CO in VS. Ma come il quadrato di FN al quadrato di FZ, così stava parimente il quadrato di MA ovvero CS, al quadrato di QV, sarà dunque il quadrato di CM al rettangolo di CO in VS, come il quadrato di CS al quadrato di OV, e permutando il quadrato di CM al quadrato di CS, come il rettangolo CO, VS, al quadrato di QV. Che è quello &c.

Corollario.

Se in vece dei punti CS nella retta CZS fossero assegnati due altri *punti qualunque* Q, P, e fosse parimente assegnata la ragione del rettangolo di QO, in PV al quadrato di QV con simil progresso si proverà, che le rette MO, AV, le quali da due punti M, A, egualmente distanti dalla retta CZS, e dati di posizione, si tireranno per O, V, averanno sempre il punto del concorso F nel perimetro di qualche Sezione Conica.

PROPOSIZIONE III.

FIG. 133. 134. 135. *Se nel piano di qualsivoglia Sezione Conica* ABD *si prenderà un Punto* P, *dal quale nella curva* ABD *cadano infinite rette, come* PAB *segnandola in due punti, come* A, B, *e si dividano le intercette* AB *per mezzo in* Q, *dico, che*

che il luogo di tutti i punti O, sarà una Sezione Conica simile, e similmente posta alla precedente, e la quale passerà per il punto P.

Sia primieramente la Sezione *ABD* una Parabola. Dal punto *P* si tiri il diametro *PDLHG*, il quale concorra con la Parabola in *D*. Per *D* si conduca *DEC* paralella a *PAB*, e da *C* si ordini *CFG* al diametro *PDLHG*. Tirata poscia dal punto *O* la retta *OEF* paralella a *PDLHG*, la quale seghi le *CD*, *CG*, in *E*, ed in *F*, dai punti *O*, *E* si tirino *OL*, *EH*, paralelle all'ordinata *CG*. Ciò posto essendo *OEF* paralella al diametro *PDLHG*, e dividendo per mezzo la *AB* in *O*, sarà anch'essa uno de' diametri della Sezione, e dividerà per mezzo tutte le paralelle ad *AB* come *CD*. Sarà dunque per la similitudine de' triangoli *EH* la metà di *CG*, e *DH* la metà di *DG*. E perchè *CG* è ordinata al diametro *DLHG*, sarà il quadrato di *CG* eguale al rettangolo dell'ascissa *DG* nel lato retto *R*, e però il quadrato di *EH* metà di *CG*, sarà eguale al rettangolo di *DH*, metà dell'ascissa nella metà del lato retto *R*. Ma a causa delle paralelle *OEF*, e *PLH*, *PAE*, e *DEC*, *OL*, ed *EH*, *OL* è eguale ad *EH*, e *PL* eguale a *DH*, adunque il quadrato di *OL* sarà eguale al rettangolo dell'ascissa *PL*, nella metà di *R*, e però la curva *MOPN* è una Parabola anch'essa, il di cui diametro è *PDL*, che è parimente diametro della Parabola proposta *ABD*, e il lato retto eguaglia la metà di *R*. E per essere il punto *P* vertice del diametro *PDL*, la Parabola *MOPN* passerà per il

FIG. 131.

 pun-

punto *P*. Che è quanto in primo luogo era da provarsi.

FIG. 134. e 135. Secondariamente sia la curva *ABD* un Iperbola, o un Ellisse. Dal centro *Q* della Sezione per il punto *P* si tiri il diametro *RQPDHG*, il quale seghi la curva in *D*. Condotta quindi per *D* la *DEC* paralella alla *PAB*, si ordini parimente dal punto *C* al diametro *RQDHG* la *CG*, e dal centro *Q* cada nel punto *O* il diametro *QOE*, il quale taglierà per mezzo *AB* in *O*, e *CD* paralella ad *AB*, in *E*, e finalmente da' punti *O*, *E*, si tirino *OL*, *EH* paralelle all'ordinata *CG*. Perchè dunque *CG* è ordinata al diametro *R Q D H G*, sarà il quadrato di *CG* al rettangolo delle porzioni del diametro *RG*, *DG*, come il lato retto *L* al trasverso *R D E*, poichè *DC* è segata per mezzo in *E*, sarà per la similitudine de' triangoli, *E H* eguale alla metà di *C G*, e *DH* eguale alla metà di *DG*. Perciò il quadrato di *EH* metà di *CG*, sarà al rettangolo di *D H* in *QH*, metà delle respettive *RG*, *DG*, nella stessa ragione di *L* a *RD*. Ma essendo per la similitudine dei triangoli *OL* ad *EH*, come *PL* a *DH*, ovvero come *QL* a *QH*, sarà componendo le ragioni, il quadrato di *OL* al quadrato di *EH*, come il rettangolo *QL* in *PL*, al rettangolo *QH* in *PH*, e permutando il quadrato *OL* al rettangolo *QLP*, come il quadrato *EH* al rettangolo *GHD*: adunque il quadrato *OL* al rettangolo *QLP* sarà nella medesima ragion costante del lato retto *L* al trasverso *RD*. E però la curva *MOPN* sarà un Iperbola, o un Ellisse simile alla già proposta, avendo i quadrati dell'ordinate paralelle

lelle $C\,G$, $O\,L$, nella medesima ragione a i rettangoli delle respettive ascisse prese nella medesima retta $R\,Q\,P\,D\,L\,G$. E perchè il punto P è vertice del diametro $G\,P$, la curva $M\,O\,P\,N$ passerà necessariamente per P. Il che doveva in secondo luogo dimostrarsi.

Corollarj.

I. E' manifesto, che nell'Iperbola, e nell' Ellisse il punto Z, centro della Sezione $MOPN$, taglierà pel mezzo la retta PQ, la quale congiunge il punto P con Q centro della Sezione proposta $A\,B\,D$.

II. E però la medesima curva $MOPN$ doverà parimente passare ancora per il punto Q.

III. Tirandosi per il punto Z gli asintoti all'Iperbola $M\,O\,P\,N$, doveranno questi esser paralelli agli asintoti dell'Iperbola $A\,B\,D$.

IV. Per quanto possa variarsi in una stessa Parabola il sito del punto P, le Parabole, le quali segheranno per mezzo le intercette $A\,B$, saranno sempre eguali, nè differiranno in altro, che nella semplice posizione. FIG. 135.

V. Se in vece della curva fossero date due rette $B.F$, $A\,R$, le quali concorressero in un punto Q, dovranno considerarsi come un Iperbola, nella quale il lato retto dell'asse, e il trasverso siano infinitamente piccoli, e stiano fra loro nella stessa ragione del quadrato della tangente della metà dell'angolo $A\,Q\,B$, al quadrato del raggio. Che però congiunta la QP, e divisa per mezzo in Z, si tirino ZG, ZH, paralelle a BB, QA, e per il punto P fra gli asintoti ZH, ZG si descriva l'I- FIG. 136.

perbola MPN, la quale taglierà per mezzo tutte le rette APB, intercette fra i lati QA, QB, dell'angolo AQB, e che passano per il punto P. Notisi che l'Iperbola conjugata passa per il punto Q, e divide per metà la rette FL, RS, intercette fra gli angoli LQB, SQA, conseguenti all'angolo AQB.

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 137. *Ritrovare la misura generale di tutti i solidi generati dal rivolgimento delle Sezioni Coniche intorno al loro asse, e di qualunque porzione dei medesimi.*

SIa $ABCLG$ il solido generato dal rivoltarsi la Sezione Conica ALC intorno al suo asse LB, e sia da ritrovarsi generalmente la misura della porzione $AbCIhG$, compresa fra due cerchj paralelli GhI, AbC, descritti dall' ordinate GH, AB. Divisa per mezzo la porzione HB dell' asse intercetta fra le ordinate GH, AB, in E, per il punto E, s'intenda segato il solido $AbCbG$, col cerchio DeF perpendicolare all' asse, il cui raggio è uguale all' ordinata DE. Posto ciò, dico, che la porzione $GbICbA$ è eguale al cono, che ha per altezza HB, e per base la metà dei cerchi GbI, AbC, insieme col doppio del cerchio DeF.

FIG. 138. Per più chiara intelligenza della dimostrazione, premetto il seguente lemma. Qualsivoglia porzione di cono retto $AcBEfD$ è eguale al cono, che ha per altezza l'asse della porzione FC, e per base la somma dei cerchj AcB, DfE,

D f E, e del medio proporzionale fra questi.

Imperocchè la differenza del prodotto di *AC* quadrato in *CG* dal prodotto di *DF* quadrato in *FG*, eguale ad *AC* quadrato in *CF* insieme con *AC* quadrato in *FG* meno *DF* quadrato in *FG*, ovvero, il che torna il medesimo, è eguale ad *AC* quadrato in *CF*, insieme con *AC* quadrato in *FG*, e con *DF* quadrato in *CF*, meno *DF*, quadrato in *CG*. Ma essendo per la similitudine dei triangoli *AC* a *DF*, come *CG* a *FG*, sarà il rettangolo *AC*, *FG* eguale al rettangolo *DF*, *CG*, e moltiplicando ambidue per l' altezza *DF*, il solido *AC*, *FG*, *DF* eguale a *DF* quadrato in *CG*, e però *AC* quadrato in *FC* insieme con *DF* quadrato in *FC*, e con *AC* quadrato in *FG*, meno *DF* quadrato in *CG*, sarà eguale ad *AC* quadrato in *FC*, insieme con *DF* quadrato in *FC*, e con *AC* quadrato in *FG*, meno il solido *AC*, *FG*, *DF*; ma *AC*, quadrato in *FG*, meno il solido *AC*, *FG*, *DF*, cioè il solido di *AC*, *FG* nella differenza di *AC*, *FD* è eguale al solido di *AC*, *FD* in *FC*, per essere *FD* a *FG*, come la differenza di *AC*, *FD* alla differenza di *CG*, *FG*, cioè a *FC*, adunque la differenza del solido *AC*, quadrato in *CG* dal solido *DF* quadrato in *FG* è uguale a i solidi *AC* quadrato in *FC*, insieme con *DF*, quadrato in *FC*, e con *AC*, *DF* in *FC*. E perchè il solido *AC* quadrato in *CG* sta alla differenza del solido *AC* quadrato in *GC* dal solido *DF* quadrato in *FG*, come il cono *AcGB* alla porzione *AcBEfD*, sarà ancora come il cono alla porzione, così il solido *AC* quadrato

in *GC* alla somma di *AC*, quadrato in *FC*, di *FD* quadrato in *FC*, e del rettangolo *AC*, *DF*, (ovvero del quadrato medio proporzionale fra i quadrati di *AC*, *DF*) in *FC*; ma come quello a questi, così sta il cono *AcBG* al cono, la cui altezza è *FC*, e la base la somma dei cerchj *AcB*, *DfE*, e del medio proporzionale fra i medesimi, adunque quest' ultimo è uguale alla porzione *AcBEfD*; il che era &c.

FIG. 139. Venendo adesso alla prova della Proposizione esposta, si tirino da' punti *A*, *C* della Sezione le tangenti *Adg*, *Cfi*, le quali seghino le ordinate *DEF*, *GHI*, prolungate quanto bisogna nei punti *d*, *g*, *f*, *i*, e s' intenda circoscritto alla porzione *ADGIFC*, un tronco conico retto *AgiC*, le cui basi siano i cerchj *AC*, *gi*, e l' altezza *HB*. E' manifesto, che l' eccesso del tronco *AgiC* sopra la porzione *ADGIFC* è eguale al bicchiere generato dal rivolgimento del trilineo *AdgGDA* intorno all' asse *BH*. Sottraendo dunque dal tronco *AgiC* cioè per il lemma precedente, dal cono, che ha per altezza *BH*, e per base la somma dei cerchi, *gi*, *AC*, e del medio loro proporzionale il bicchiere *AgGIiC*, si averà la misura esatta della porzione. Ma essendo per la proprietà generale delle Sezioni Coniche i rettangoli *IgG*, *FdD*, fra loro, come i quadrati delle parti della tangente *Ag*, *Ad*, cioè a causa delle paralelle, come i quadrati delle *BH*, *BE*, saranno anche le ciambelle circolari *giIG*, *dfFD*, le quali sono proporzionali a i medesimi rettangoli, proporzionali parimente a i quadrati *BH*, *BE*, cioè supposto un cono retto *bBb*, coll' altezza *BH*, e colla base

se eguale alla ciambella $giIG$, proporzionali a i cerchj bb, ee, del cono, e permutando sarà come la ciambella $giIG$ alla base bb, così qualunque altra $dfFD$ al cerchio corrispondente ee, cioè a dire eguale. Perchè dunque le Sezioni del cono, e del bicchiere, prese alla medesima altezza, sono da per tutto eguali, sarà per la dottrina degl' indivisibili il bicchiere eguale al cono, e sottraendo quest' ultimo dal cono, che ha per altezza la HB, e per base la somma dei cerchj gi, AB, insieme col loro medio proporzionale, il residuo sarà eguale alla porzione $ADGIFC$. Ma il cerchio gi è eguale al cerchio GH, e alla ciambella $giIG$, ovvero al cerchio bb, adunque sottraendo dal cono, che ha per altezza la BH, e per base la somma de' cerchj gi, AC, e del medio proporzionale fra questi, il cono hBh, resterà il cono, che averà per base la somma dei cerchj GI, AC, e del medio proporzionale fra gi, AC. Ma perchè la retta BE è eguale ad EH, sarà la Ed media aritmetica fra le AB, gH, e però il doppio di Ed eguale alla somma di AB, gH, e quadrando sarà il quadruplo del quadrato di Ed, eguale alla somma de' quadrati di AB, gH, e al doppio del rettangolo di AB in gH, e dividendo per metà, sarà il doppio del quadrato di Ed, eguale alla metà dei quadrati di AB, gH, e al rettangolo AB in gH, ovvero il rettangolo AB in gH, sarà eguale all' eccesso del doppio del quadrato di Ed, sopra la metà dei quadrati di AB, gH. Ed è il doppio del quadrato di Ed, eguale al doppio del quadrato ED, e del rettangolo FdD, e la metà del quadrato gH eguale alla metà del quadrato GH, e del

ret-

rettangolo IgG; adunque il rettangolo AB in gH è eguale all'eccesso del doppio del quadrato DE, e del rettangolo FdD, sopra la metà del quadrato GH e del quadrato AB, e del rettangolo IgG; ma la metà del rettangolo IgG è eguale al doppio del rettangolo FdD, per essere i detti rettangoli fra loro nella stessa ragione dei quadrati Ag, AD, cioè quadrupla, laonde il rettangolo AB in gH è eguale all'eccesso del doppio del quadrato di ED, sopra la metà dei quadrati GH, AB. E però il cerchio, che ha il quadrato del raggio eguale al rettangolo AB in gH, ovvero il cerchio medio proporzionale fra i cerchi AC, gi, è eguale all' eccesso del doppio del cerchio DF sopra la metà de' cerchj AC, GI, la base dunque del cono eguale alla porzione $ADGIFC$, la quale si è provata eguale alla somma dei cerchj AC, GI, e del medio proporzionale fra i cerchj AC, gi, sarà ancora eguale alla somma dei cerchj AC, GI, e all' eccesso del doppio del cerchio DF, sopra la metà dei cerchj AC, GI, ovvero eguale alla metà dei cerchj AC, GI, e al doppio del cerchio DF, Che è quanto doveva finalmente dimostrarsi.

Se in vece della porzione $ADGIFC$, si cercasse la misura dell'intero conoide $ADLFC$, in tal caso il cerchio GI diventerebbe eguale a zero, e la determinazione riuscirebbe più semplice, dovendo la base del cono eguale al conoide, essere eguale solamente alla metà della base del conoide, e al doppio del cerchio DEF, che ha per raggio l'ordinata DE dal punto E, che sega per mezzo l'asse del conoide LB.

FIG. 140.

L'in-

L'invenzione di questa misura generale di conoidi, e sferoidi, è dovuta al celebre Evangelista Torricelli, nei di cui manoscritti, che tuttavia si conservano nella Libreria di S. A. R. si trova brevemente accennata insieme con altre reliquie di speculazioni Geometriche, e Meccaniche di quel grand'Uomo. Notisi intanto, che la Proposizione premessa, ci apre la strada alla determinazione parimente generale del centro di gravità, il quale in qualsivoglia porzione *ADLIFC*, si trova segando l' asse *HB* della medesima, in modo, che la parte *HS* alla *SB* stia come la somma del quadrato *AB*, e del doppio del quadrato *DE*, alla somma del quadrato *GH*, e del doppio parimente del quadrato *DE*. Del qual Teorema, come ancora di tutte le conseguenze particolari, che potrebbero ricavarsi dalla dottrina esposta, per non dilungarci di soverchio, non staremo ad addurne la dimostrazione, la quale da chi è punto versato in questi studj, potrà coll'ajuto delle cose già dette, facilmente ritrovarsi.

IL FINE.

NOI

Fig. 1.
F
d
e

CONIC. TAV. I

F

e

b

2

SECT. CONIC. T. II.

T-CONIC-T-III-

O.

34.

C
P
G
N

ECT-CON-T-V-

51 SECT-CONIC-T-VI

C A B I 54